BCPST 2$_A$

DEVOIR SURVEILLE

MATHÉMATIQUES

Samedi 28 septembre 2024

(3 heures)

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités ***à encadrer*** *dans la mesure du possible les conclusions.*
La calculatrice n'est pas autorisée.
Le sujet comporte 4 pages.

- *On rappelle que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \pi \approx 3{,}14$$

- *On admet la propriété suivante qui ne sert que dans la fin de la partie 3 du problème 2 :*
  pour toute suite double $(u_{n,p})$ de réels positifs ou nuls, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) \quad \text{dès qu'une des deux expressions est constituée de séries convergentes.}$$

Questions préliminaires.

1) Rappeler la définition de la fonction arctangente.
2) Donner les valeurs suivantes : $\arctan(0)$, $\arctan(1)$ et $\arctan(-1)$.
3) Démontrer que la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et retrouver l'expression de sa dérivée.
4) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de arctan au point d'abscisse 1.
5) Donner l'allure de la courbe de la fonction arctangente. *On prendra pour unité 2cm.*
   On fera apparaitre les asymptotes et les tangentes aux points d'abscisse -1, 0 et 1.
   L'évaluation valorisera particulièrement le soin et la rigueur apportés à cette représentation graphique.
6) Le module `matplotlib.pyplot` a été importé par l'instruction `import matplotlib.pyplot as plt`
   La constante `pi` et la fonction `tan` du module `math` ont été importées par : `from math import pi, tan`.
   Donner un programme permettant de tracer la courbe de la fonction arctangente sur l'intervalle $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
   Vous n'utiliserez que la fonction `tan` *et pas une fonction donnant l'arctangente d'un nombre.*

Problème 1 Calcul approché de π

On définit, pour tout entier $n \geqslant 0$, sur $[0, 1[$ la fonction polynomiale P_n par :

$$P_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

1) a) Quel est le degré de P_n ? , son coefficient dominant et son terme constant ?
   b) Etudier la parité de P_n.
   c) Donner P_0, P_1, P_2 et P_3.

2) a) Rappeler la dérivée de la fonction arctan et une expression de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ lorsque q est un réel différent de 1.

b) Calculer explicitement pour $x \in [0,1]$, $P_n'(x)$

et en déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $\arctan'(x) - P_n'(x) = \dfrac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$

c) En discutant selon que n est pair ou impair,

déterminer le sens de variation, puis le signe sur $[0,1]$ de la fonction $x \longmapsto \arctan(x) - P_n(x)$.

3) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

4) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(x) \text{ et } P_{n+1}(x) \text{ encadrent } \arctan(x) \qquad \text{et} \qquad |\arctan(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Remarque : Comme sur $[0,1]$, $\dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \dfrac{x^{2n}}{2n}$, *on utilisera dans la suite l'inégalité* $|\arctan(x) - P_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{2n}$.

5) On fixe un réel $x \in [0,1]$.

Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ existe et vaut $\arctan(x)$.

6) a) Justifier que le segment $\Big[4P_{2m+1}(1)\,,\,4P_{2m}(1)\Big]$ fournit un encadrement de π d'amplitude $\dfrac{1}{m}$.

b) Écrire une fonction en python `Pn(n, t)` qui calcule $P_n(t)$.

c) Écrire une fonction en python `encadrepi(epsilon)` qui fournisse les bornes d'un encadrement de π à epsilon près à partir du résultat précédent.

7) a) Justifier en deux lignes que, lorsque $x \in \big[0,1\big[$, la suite des $P_n(x)$ converge beaucoup plus vite vers $\arctan(x)$ que les $P_n(1)$ vers $\arctan(1)$.

b) Vérifier que, pour tout $\theta \in]0,\pi/2[$, $\tan(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$ et calculer $\tan(\pi/8)$.

c) En déduire que $\pi = 8\arctan(\sqrt{2}-1)$, puis, en notant $x_0 = \sqrt{2}-1$, conclure que

le segment $[8\,P_{2m+1}(x_0)\,,\,8\,P_{2m}(x_0)]$ fournit un encadrement de π d'amplitude $\dfrac{2\,x_0^{4m}}{m}$.

8) *Résolution d'un problème numérique*

On peut calculer et stocker une valeur extrêmement précise de $\sqrt{2}$, *cependant, au fur-et-à-mesure des calculs de puissances de* x_0, *la précision va se dégrader.*

On note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $A_0 = -1$ et $B_0 = 1$ et,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} A_{n+1} &= 3A_n - 4B_n \\ B_{n+1} &= -2A_n + 3B_n \end{cases}$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n, A_n et B_n sont des entiers relatifs.

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{2}-1)^{2k+1} = A_k + \sqrt{2}\,B_k$.

On en conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A_k}{2k+1} + \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k B_k}{2k+1} \qquad \text{et} \qquad |\pi - 8\,P_n(x_0)| \leqslant \frac{4\,(A_{n+1} + \sqrt{2}\,B_{n+1})}{n}$$

Ces deux derniers résultats ne sont pas à démontrer.

9) *Traitement informatique*

a) Écrire une fonction en python `coeffAB(n)` qui prend pour argument un entier `n` et qui renvoie le (A_n, B_n).

b) Écrire une fonction en python `listecoeffAB(epsilon)` qui renvoie l'entier n et la liste des couples (A_k, B_k) jusqu'à ce que $\dfrac{4(A_{n+1} + \sqrt{2}\,B_{n+1})}{n} <$ `epsilon`.

L'évaluation valorisera les fonctions cherchant à réduire le nombre d'opérations.

c) Écrire une fonction en python `calculPn(n, liste_AB)` qui renvoie $P_n(x_0)$ à partir de l'entier `n` et de la liste `liste_AB` des couples (A_k, B_k) obtenu par la fonction de la question précédente.

Problème 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Dans ce problème, on dira que la suite (u_n) vérifie $(\mathscr{L})$ lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \qquad \textit{(la somme existe et vaut 1)}$$

Partie 1

1) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, on note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in [\![0;N]\!],\ b_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \notin [\![0;N]\!],\ b_n = 0.$$

   a) Montrer que (b_n) vérifie $(\mathscr{L})$.

   b) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} nb_n$ converge et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nb_n$.

2) On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$c_0 = 0 \text{ et } \forall n \in [\![1;+\infty[\![,\ c_n = \frac{1}{2^n}.$$

   a) Montrer que (c_n) vérifie $(\mathscr{L})$.

   b) Montrer que $\sum nc_n$ converge et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nc_n$.

3) On note $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \frac{2^n}{n!}e^{-2}.$$

   a) Montrer que (d_n) vérifie $(\mathscr{L})$.

   b) Montrer que $\sum nd_n$ converge et calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nd_n$.

4) A l'aide des séries usuelles déterminer une suite (e_n) vérifiant $(\mathscr{L})$ mais telle que $\sum ne_n$ diverge.

Partie 2.

Soit (u_n) une suite vérifiant $(\mathscr{L})$, on note la fonction $f_u : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$

1) a) Montrer que que f_u est définie sur $[0,1]$.
   b) Donner les valeurs de $f_u(0)$ et $f_u(1)$.
   c) Montrer que f_u est croissante sur $[0,1]$.

2) On reprend la suite (b_n) de la partie 1 et on s'intéresse ici à $f_b : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

   a) Montrer f_b est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Justifier que f_b est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f_b(x) = (1-p+px)^N$.
   d) En déduire $f_b'(1)$.

3) On reprend la suite (c_n) de la partie 1 et on s'intéresse ici à $f_c : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

   a) Montrer que l'ensemble de définition de f_c est $\big] -2\,,\,2\,\big[$.

   (Il s'agit ici de déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n x^n$ converge)

   b) Exprimer pour tout $x \in]-2\,,\,2\,[$, $f_c(x)$ en fonction de x sans la notation $\sum$.
   c) En déduire que f_c est dérivable sur $]-2\,,\,2\,[$.
   d) Montrer que $f_c'(1) = 2$.

Partie 3.

Soit (u_n) une suite vérifiant $(\mathscr{L})$, on note ici f la fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \end{array}$.

(f est la restriction de f_u au segment $[0,1]$).

Le but de cette partie est de démontrer que f est continue en 1, puis sous condition que f est dérivable en 1.

On note $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

1) Déterminer les variations des suites (S_n) et (R_n) ainsi que leur limite.
2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $x^k - x^{k+1}$ sur le segment $[0,1]$.
3) a) Soit $x \in [0,1]$.
   i. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k(1-x^k) = R_n(x^{n+1}-1) + \sum_{k=0}^{n} R_k(x^k - x^{k+1})$$
   ii. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1})$$
On justifiera bien l'existence de ces deux sommes.

   b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) \leqslant R_0(1-x^N) + R_N$$
Indication on majorera séparément : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} R_k(x^k - x^{k+1})$ *et* $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1})$

   c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = 0$.

Indication : On utilisera ici la définition quantifiée des différentes limites.

   d) En déduire que f est continue en 1.

4) a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k u_k$ converge si et seulement si, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} R_k$ converge.

   et qu'en cas de convergence : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$.

   b) On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k u_k$ converge,
   i. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,
$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - 1)$$
   ii. En déduire que f est dérivable en 1.

On pourra pour cela utiliser 3) pour une suite qui vérifie les mêmes propriétés que la suite (u_n).

   iii. Exprimer $f'(1)$ en fonction des u_k.

FIN DU SUJET