

Questions préliminaires.

$$1) \text{ On note } \varphi \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$$

φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ donc (théorème de la bijection)

$$\varphi \left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) = \left] \lim_{-\frac{\pi}{2}} \varphi, \lim_{\frac{\pi}{2}} \varphi \right[= \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi \text{ est bijective de } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ dans } \mathbb{R}.$$

La fonction arctangente est la réciproque de cette fonction φ .

$$2) \tan(0) = 0 \text{ et } 0 \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ donc } \boxed{\arctan(0) = 0}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ et } \frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ donc } \boxed{\arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ et } -\frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ donc } \boxed{\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}}$$

$$3) \varphi \text{ est bijective de } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ dans } \mathbb{R}, \varphi \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \varphi'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0,$$

donc (dérivation de la bijection réciproque)

φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

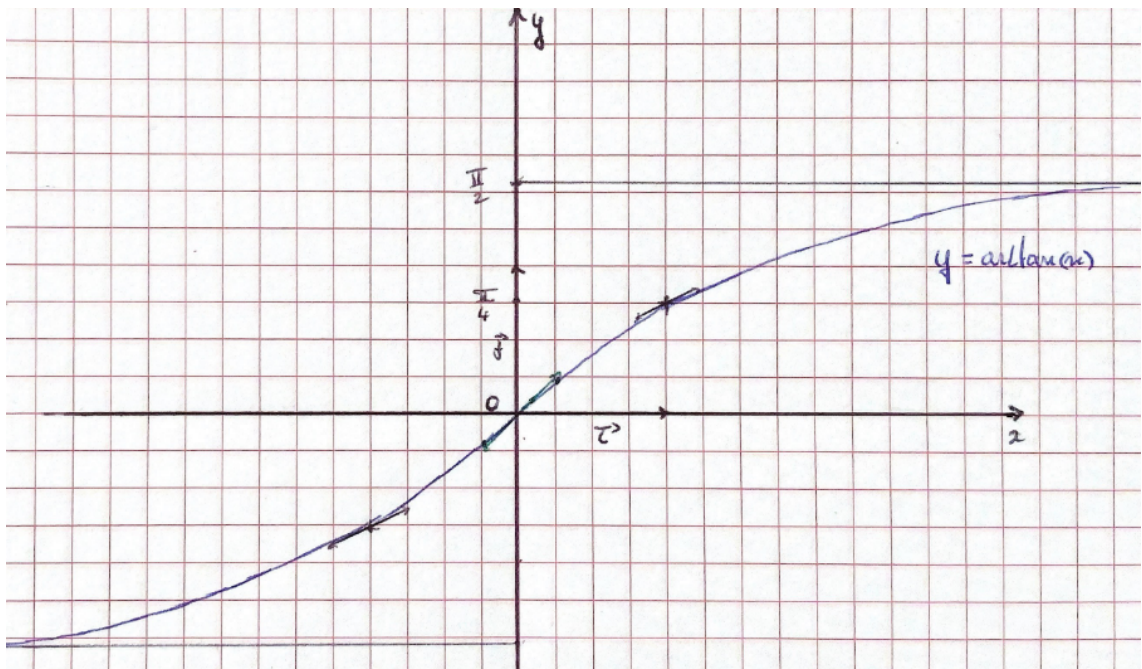
$$\begin{aligned} (\varphi^{-1})'(x) &= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$4) \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \arctan'(1) = \frac{1}{2} \text{ donc}$$

$$\boxed{T: y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\pi}{4}}$$

5) A faire avec soin.



```

6) a, b = -pi/3, pi/3
N = 100
x = [ a + k*(b-a)/N for k in range(N+1) ]
y = [ tan(t) for t in x ]
plt.plot(y, x)                                # On inverse x et y pour obtenir la courbe symétrique.
plt.axis("equal")                             # Optionnel : repère orthonormé.
plt.show()

```

Problème 1

- 1) a) Le degré est l'indice du dernier coefficient non nul, $\deg(P_n) = 2n + 1$ et son coefficient dominant est $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

$P_n(0) = 0$ donc le terme constant est 0.

- b) (Ici il y a une erreur d'énoncé).

Réponse 1 : P_n est somme de monôme de degré impair donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = -P_n(x)$ et ainsi

la fonction P_n est impaire

Réponse 2 : P_n est ici définie sur $[0, 1]$ qui n'est pas symétrique par rapport à zéro donc

la fonction P_n n'est ni paire, ni impaire

- c)

$$P_0 : x \mapsto x, \quad P_1 : x \mapsto x - \frac{1}{3}x^3, \quad P_2 : x \mapsto x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \quad \text{et} \quad P_3 : x \mapsto x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

- 2) a) La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

et lorsque q est un réel différent de 1, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

- b) Comme polynôme P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 P'_n(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} \\
 &= \sum_{k=0}^n (-x^2)^k \\
 &= \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} \quad \text{car } -x^2 \neq 1
 \end{aligned}$$

Sachant que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ il vient :

$$\text{Pour tout } x \in [0, 1], \quad \arctan'(x) - P'_n(x) = \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

- c) On note ici f la fonction $\arctan - P_n$

• Si n est pair.

on a $(-x^2)^{n+1} < 0$ sur $]0, 1]$

x	0	1
$f'(x)$	0	—
f	0	$\frac{\pi}{4} - P_n(1)$

On en déduit le signe de f sur $[0, 1]$:

x	0	1
$f(x)$	0	—

• Si n est impair.

on a $(-x^2)^{n+1} > 0$ sur $]0, 1]$

x	0	1
$f'(x)$	0	+
f	0	$\frac{\pi}{4} - P_n(1)$

On en déduit le signe de f sur $[0, 1]$:

x	0	1
$f(x)$	0	+

$$3) P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{et} \quad P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{donc} \quad P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}$$

et comme pour x dans $[0, 1]$, $x \geq 0$, il vient alors, $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad |P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$

4) D'après la question 2)c),

si n est pair, $\forall x \in [0, 1], \quad P_{n+1}(x) \leq \arctan(x) \leq P_n(x)$

si n est impair, $\forall x \in [0, 1], \quad P_n(x) \leq \arctan(x) \leq P_{n+1}(x)$

Dans tous les cas : $[P_n(x) \text{ et } P_{n+1}(x) \text{ encadrent } \arctan(x)]$

si n est pair, $P_{n+1}(x) \leq \arctan(x) \leq P_n(x)$ donc $P_{n+1}(x) - P_n(x) \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq 0$

d'où $|\arctan(x) - P_n(x)| \leq |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$

si n est impair, $P_n(x) \leq \arctan(x) \leq P_{n+1}(x)$ donc $0 \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq P_{n+1}(x) - P_n(x)$

d'où $|\arctan(x) - P_n(x)| \leq |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$

dans tous les cas on a bien $|\arctan(x) - P_n(x)| \leq |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$ et ainsi en utilisant le résultat de la

question 3) on obtient : $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$

$$5) \text{ Pour } x \in [0, 1] \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

l'inégalité de la question précédente devient $|\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ donc (corollaire du théorème des gendarmes) la suite des $P_n(x)$ converge vers $\arctan(x)$,

autrement dit : $\text{la somme } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \text{ existe et vaut } \arctan(x)$

6) a) La questions 4) donne en prenant $x = 1$ et $n = 2m$: $P_{2m+1}(1) \leq \arctan(1) \leq P_{2m}(1)$

ce qui donne $4P_{2m+1}(1) \leq \pi \leq 4P_{2m}(1)$

de plus la 4) donne aussi $|P_{2m+1}(1) - P_{2m}(1)| \leq \frac{1}{4m+3}$ ou encore $|4P_{2m+1}(1) - 4P_{2m}(1)| \leq \frac{4}{4m+3}$

or $\frac{4}{4m+3} \leq \frac{1}{m}$, donc

le segment $[4P_{2m+1}(1), 4P_{2m}(1)]$ fournit un encadrement de π à $\frac{1}{m}$ près.

b)

def Pn(n,t):

""" retourne la valeur de Pn(t) """

S = 0

a, b = t, -t**2

for k in range(n+1): # k va de 0 à n

S += a / (2*k+1) # a vaut t^(2k+1)

a = a * b

return S

c)

```
def encadrepn(epsilon):
    """retourne un encadrement de pi à epsilon près
    sous la forme d'un tuple"""
    m = int(1/epsilon) + 1
    a = 4*Pn(2*m, 1)
    return a-epsilon, a
```

- 7) a) Le majorant de l'erreur contient un facteur x^{2n+3} qui tend géométriquement vers 0 quand $0 \leq x < 1$ c'est pourquoi :

lorsque $x \in [0, 1[$, la suite des $P_n(x)$ converge beaucoup plus vite vers $\arctan(x)$ que lorsque $x = 1$

- b) Soit $\theta \in]0, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} &= \frac{1 - \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{2 \sin(\theta) \cos(\theta)} \\ &= \frac{2 \sin^2(\theta)}{2 \sin(\theta) \cos(\theta)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}}$$

En prenant : $\theta = \frac{\pi}{8}$, il vient : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Connaissant le sinus et le cosinus de $\frac{\pi}{4}$ on obtient $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1}$

c) On a $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$ et $\frac{\pi}{8} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\frac{\pi}{8} = \arctan(\sqrt{2} - 1)$ ou encore $\boxed{\pi = 8 \arctan(\sqrt{2} - 1)}$

On note $\boxed{x_0 = \sqrt{2} - 1}$,

En utilisant le résultat de la question 4) on obtient :

$$\boxed{\text{le segment } [8P_{2m+1}(x_0), 8P_{2m}(x_0)] \text{ fournit un encadrement de } \pi \text{ à } \frac{2x_0^{4m}}{m} \text{ près.}}$$

- 8) a) Les relations de récurrence définissant (A_n) et (B_n) permettent d'affirmer que quel que soit l'entier n , si $A_n \in \mathbb{Z}$ et $B_n \in \mathbb{Z}$ alors $A_{n+1} \in \mathbb{Z}$ et $B_{n+1} \in \mathbb{Z}$,
et comme de plus, A_0 et B_0 sont des entiers, on a bien : (*principe du raisonnement par récurrence*)

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \quad A_n \text{ et } B_n \text{ sont des entiers relatifs}}$$

- b) Montrons par récurrence sur k , que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{2} - 1)^{2k+1} = A_k + \sqrt{2} B_k$.

- Pour $k = 0$,

$$(\sqrt{2} - 1)^{2k+1} = \sqrt{2} - 1 \quad \text{et} \quad A_0 + \sqrt{2} B_0 = \sqrt{2} - 1$$

La propriété est vraie pour $k = 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\sqrt{2} - 1)^{2k+1} = A_k + \sqrt{2} B_k$

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - 1)^{2(k+1)+1} &= (\sqrt{2} - 1)^{2k+1} (\sqrt{2} - 1)^2 \\ &= (A_k + \sqrt{2} B_k) (3 - 2\sqrt{2}) \\ &= (3A_k - 4B_k) + \sqrt{2} (-2A_k + 3B_k) \\ &= A_{k+1} + \sqrt{2} B_{k+1} \end{aligned}$$

Si la propriété est vraie à un rang k , elle l'est au rang $k + 1$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad (\sqrt{2} - 1)^{2k+1} = A_k + \sqrt{2} B_k}$$

9) a) On utilise la relation de récurrence définissant la suite (A_n) et (B_n) .

```
def coeffAB(n):
    a, b = -1, 1
    for k in range(n):
        a, b = 3*a - 4*b, -2*a + 3*b
    return a, b
```

b) On n'utilise pas la fonction précédente pour ne pas recalculer à chaque tour de boucle tous les termes de la suite.

```
def listecoeffAB(epsilon):
    a, b = -1, 1
    L=[(a,b)]
    k = 0
    while True:
        a, b = 3*a - 4*b, -2*a + 3*b
        L.append((a,b))
        k += 1
        # L contient (A0,B0) ... (Ak,Bk)
        if k > 2 and 4*(a+2**(0.5)*b)/(k-1) < epsilon:
            return k-1, L
    # On renvoie n et (A0,B0) ... (An+1,Bn+1)
```

c) On utilise ici la formule :

$$P_n(x_0) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k A_k}{2k+1}}_{S_1} + \sqrt{2} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k B_k}{2k+1}}_{S_2}$$

```
def calculPn(n, L):
    S1, S2 = 0, 0
    for k in range(n+1):
        S1 += (-1)**k * L[k][0] / (2*k+1)
        S2 += (-1)**k * L[k][1] / (2*k+1)
    return S1 + 2**(0.5) * S2
```

Si on exécute ces programmes :

```
eps = 10**(-10)
```

```
n, L = listecoeffAB(eps)
Pn = calculPn(n, L)
print(8*Pn)
print(pi)
```

on obtient l'affichage :

```
3.1415926590561867
3.141592653589793
```

Les 1000 premières décimales de π sont :

```
3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825
3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559
6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610
4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360
0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737
1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082 7785771342
7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611 2129021960
8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859 5024459455
3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787 6611195909
2164201989...
```

Problème 2

Partie 1

- 1) a) • $p \in]0, 1[$ donc pour tout n , $b_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \geq 0$
 • de plus b_n est nul pour $n > N$ donc la série converge et sa somme vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N b_k &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= (p + (1-p))^N \quad (\text{formule du binôme}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{(b_n) \text{ vérifie } (\mathcal{L})}$$

- b) nb_n est nul pour $n > N$ donc la série converge et sa somme vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N k b_k &= \sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= \sum_{k=1}^N N \binom{N-1}{k-1} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= Np \sum_{k=1}^N \binom{N-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{N-k} \\ &= Np \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \\ &= Np(p + (1-p))^{N-1} \quad (\text{formule du binôme}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} n b_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} n b_n = Np}$$

- 2) a) • $c_0 = 0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^n} \geq 0$
 • de plus :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} - 1 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 \quad (\text{Série géométrique de raison } \frac{1}{2} \in]-1, 1[) \end{aligned}$$

donc $\sum c_n$ converge de sa somme vaut 1.

En conclusion :

$$\boxed{(c_n) \text{ vérifie } (\mathcal{L})}$$

- b) On sait que : $\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{1}{2^{n-1}}$ existe et vaut $\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 4$ (série géométrique dérivée d'ordre 1)

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{1}{2^n}$ existe et vaut 2

$$\boxed{\sum n c_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n = 2}$$

3) a) • pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \frac{2^n}{n!} e^{-2} \geq 0$

• de plus on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ existe et vaut e^2 (série exponentielle) donc $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n$ existe et vaut 1.

En conclusion :

$$\boxed{(d_n) \text{ vérifie } (\mathcal{L})}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k d_k &= \sum_{k=0}^n k \frac{2^k}{k!} e^{-2} \\ &= \sum_{k=1}^n k \frac{2^k}{k!} e^{-2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} e^{-2} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} e^{-2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 e^2 e^{-2} = 2 \quad (\text{série exponentielle}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum n d_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} n d_n = 2}$$

4) En posant $e_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $e_n = \frac{6}{(n\pi)^2}$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty} e_n = 1$ (d'après le rappel au début de l'énoncé)

et $\sum_{n=0}^{+\infty} n e_n$ diverge car $n e_n = \frac{6}{\pi^2 n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

On a bien défini une suite (e_n) vérifiant $(\mathcal{L})$ mais telle que $\sum n e_n$ diverge.

Partie 2.

1) a) Soit $x \in [0, 1]$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n x^n \leq u_n$ et comme (u_n) vérifie $(\mathcal{L})$ donc $\sum u_n$ converge donc (théorème de convergence) $\sum u_n x^n$ converge.

pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ existe donc

$$\boxed{f_u \text{ est définie sur } [0, 1]}$$

b) $\boxed{f_u(0) = u_0}$ et $\boxed{f_u(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1}$

c) Soient x_1 et x_2 dans $[0, 1]$ tels que $x_1 < x_2$,

comme (u_n) est à termes positifs ou nuls, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k x_1^k \leq u_k x_2^k$

en sommant pour k allant de 0 à un entier n on obtient $\sum_{k=0}^n u_k x_1^k \leq \sum_{k=0}^n u_k x_2^k$

et en passant à la limite on obtient : $f(x_1) \leq f(x_2)$, (On peut passer à la limite car les deux sommes existent)

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0, 1]}$$

2) a) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la suite est nulle à partir de $N + 1$ donc la série $\sum b_n x^n$ est convergente ainsi :

$$\boxed{f_b \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f_b(x) = \sum_{k=0}^N b_k x^k$ donc f_b est une fonction polynomiale et ainsi :

$$\boxed{f_b \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_b(x) &= \sum_{k=0}^N b_k x^k \\ &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} x^k \\ &= \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} (px)^k \\ &= (1-p+px)^N \quad (\text{formule du binôme}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f_b(x) = (1-p+px)^N}$$

d) La formule précédente donne pour tout $x \in \mathbb{R}, f'_b(x) = Np(1-p+px)^{N-1}$

$$\boxed{f'_b(1) = Np}$$

3) a) On sait que $\sum q^n$ converge si, et seulement si, $-1 < q < 1$

donc $\sum \left(\frac{x}{2}\right)^n$ converge si, et seulement si, $x \in]-2, 2[$
 or $c_n x^n = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ donc

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f_c \text{ est }]-2, 2[}$$

b) Soit $x \in]-2, 2[$,

$$\begin{aligned} f_c(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \quad (\text{série géométrique}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-2, 2[, f_c(x) = \frac{x}{2-x}}$$

c) $x \mapsto \frac{x}{2-x}$ est une fraction rationnelle définie sur $] -2, 2[$ donc elle est dérivable sur cet intervalle.

$$\boxed{f_c \text{ est dérivable sur }]-2, 2[}$$

d) L'expression précédente donne $\forall x \in]-2, 2[, f'_c(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}$ ce qui entraîne bien :

$$\boxed{f'_c(1) = 2}$$

Partie 3.

1) $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc $\boxed{(S_n) \text{ est croissante}}$.

La série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge et sa somme vaut S donc $\boxed{(S_n) \text{ converge vers } S}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, R_{n+1} - R_n = -u_{n+1} \leq 0$ donc $\boxed{(R_n) \text{ est décroissante}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = S - S_n$ et (S_n) converge vers S donc $\boxed{(R_n) \text{ converge vers } 0}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in [0, 1], x^k - x^{k+1} = x^k(1-x)$ donc

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, x^k - x^{k+1} > 0 \text{ et pour } x \in \{0, 1\}, x^k - x^{k+1} = 0}$$

3) a) i. pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n u_k(1-x^k) &= \sum_{k=1}^n u_k(1-x^k) \\
&= \sum_{k=1}^n (R_{k-1} - R_k)(1-x^k) \\
&= \sum_{k=1}^n (R_{k-1} - R_k) - \sum_{k=1}^n R_{k-1}x^k + \sum_{k=1}^n R_k x^k \\
&= R_0 - R_n - \sum_{k=0}^{n-1} R_k x^{k+1} + \sum_{k=1}^n R_k x^k \\
&= R_0 - R_n - \sum_{k=0}^n R_k x^{k+1} + R_n x^{n+1} + \sum_{k=0}^n R_k x^k - R_0
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k(1-x^k) = R_n(x^{n+1} - 1) + \sum_{k=0}^n R_k(x^k - x^{k+1})$

ii. On sait que :

- ❶ $\sum u_n$ et $\sum u_n x^n$ convergent donc $\sum u_n(1-x^n)$ converge
- ❷ (R_n) converge vers 0 et (x_n) bornée donc $R_n(x^{n+1} - 1)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

la relation de la question précédente permet alors d'affirmer que $\sum R_n(x^n - x^{n+1})$ converge et en passant à la limite on obtient bien :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1})$$

b) Si $x = 1$ l'égalité est immédiate, raisonnons pour $x \in [0, 1[$.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} R_k(x^k - x^{k+1}) &\leq R_0 \sum_{k=0}^{N-1} (x^k - x^{k+1}) \quad \text{car } (R_n) \text{ décroissante et } (x^k - x^{k+1}) \geq 0 \\
&\leq R_0(1 - x^N) \quad (\text{telescoping})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1}) &\leq R_N \sum_{k=N}^{+\infty} (x^k - x^{k+1}) \\
&\leq R_N(x^N - 0) \quad \text{car } x \in [0, 1[\\
&\leq R_N \quad \text{car } x \in [0, 1[
\end{aligned}$$

or $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x^k - x^{k+1}) + \sum_{k=N}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1})$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) \leq R_0(1-x^N) + R_N$$

c) Soit $\varepsilon > 0$,

- d'une part prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $R_N \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (ce N existe car (R_n) converge vers 0).
- d'autre part sachant que $\lim_{x \rightarrow 1} R_0(1-x^N) = 0$,

on peut prendre un $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1-\alpha, 1], R_0(1-x^N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in [1-\alpha, 1], 0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1-x^k) = 0$$

d) On a : $f(1) - f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1 - x^k)$

donc on vient de montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} (f(1) - f(x)) = 0$ ou encore $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

f est continue en 1

4) a) Ici le signe "=" signifie "de même nature et de somme égale en cas de convergence"

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{+\infty} k u_k &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} u_k \mathbb{1}_{i \leq k} \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \mathbb{1}_{i \leq k} \quad (\text{admis au début du sujet}) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} u_k \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} R_{i-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_k
 \end{aligned}$$

donc

$\sum_{k \geq 0} k u_k$ converge si et seulement si, $\sum_{k \geq 0} R_k$ converge et alors : $\sum_{k=0}^{+\infty} k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$.

b) i. Soit $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned}
 f(1) - f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1 - x^k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1}) \quad (\text{d'après 3)a}) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_k x^k (1 - x) \\
 &= (1 - x) \sum_{k=1}^{+\infty} R_k x^k
 \end{aligned}$$

donc

Pour tout $x \in [0, 1[$, $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - 1)$

ii. La suite (R_n) possède les mêmes propriétés que (u_n) à la question 3) (à un coefficient près !)

donc $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x^k - 1) = 0$ et on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$,

f est dérivable en 1

iii. On vient de montrer que $f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$,

et avec le résultat de la question 4)a) on obtient finalement :

$f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n$

FIN DE LA CORRECTION