Table des matières

1

Structure vectorielle.

On travaille avec des nombres réels ou des nombres complexes ; pour simplifier on écrira : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Les lettres n, m, p et r désignent dans tout ce chapitre des entiers naturels non nuls.

1.1 Définition

Définition (*Compléments*)

On note E un ensemble muni de deux opérations : une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe . (définie sur $\mathbb{K} \times E$).
Dire que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel signifie que les deux lois ont les propriétés suivantes :

- $\boldsymbol{a_1}$**)** pour tout u et v de E , $\quad u + v = v + u$
- $\boldsymbol{a_2}$**)** pour tout u, v, w des éléments de E, $\quad (u + v) + w = u + (v + w)$
- $\boldsymbol{a_3}$**)** il existe 0_E un élément de E tel que pour tout $u \in E$, $\quad u + 0_E = u$
- $\boldsymbol{a_4}$**)** pour tout u de E, il existe un u' dans E tel que $\quad u + u' = 0_E$

- $\boldsymbol{b_1}$**)** pour tout u de E $\quad 1.u = u$
- $\boldsymbol{b_2}$**)** pour tout u de E pour tout α et β de $\mathbb{K}$, $\quad \alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$
- $\boldsymbol{b_3}$**)** pour tout u de E pour tout α et β de $\mathbb{K}$, $\quad (\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$
- $\boldsymbol{b_4}$**)** pour tout u et v de E, pour tout α de $\mathbb{K}$, $\quad \alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$

Remarques : ① Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs**.
② Les éléments de $\mathbb{K}$, (*les nombres*), sont appelés **scalaires**.

Propositions

❶ 0_E est unique et est nommé : vecteur nul de E.
❷ Pour tout $v \in E$ et $k \in \mathbb{K}$, $\quad k\,v = 0_E$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $v = 0_E$.
❸ u' est unique et on le note $-u$.
❹ $\forall v \in E$, $\quad -v = (-1)v$.
❺ $\forall v \in E$ et $\forall k \in \mathbb{K}$, $\quad (-k)v = k(-v) = -(kv)$.

Démonstration.
(On peut démontrer ❶ , ❷ , ❸ , ❹ et ❺ avec les a_i) et b_i), mais on rencontre rarement ce type de raisonnement en BCPST)

Théorème.

Si E est un espace vectoriel alors :

❶ $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (u, v) \in F^2, \quad \alpha u + \beta v \in E$

❷ $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \in E$

En effet :

1.2 Sommes de n vecteurs.

Définition.

Soit (u_n) une suite de vecteurs de E, on définit

$$\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1}$$

Plus simplement on pourra écrire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{u_0 + \cdots + u_n}_{n+1 \text{ vecteurs}}$

Remarque : *on ne fait aucune somme d'un nombre infini de vecteurs.*

Proposition.

Soient n un entier naturel non nul et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$,

❶ On ne change pas la somme des vecteurs en modifiant l'ordre des vecteurs.

Autrement dit : Si σ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n} u_k$

❷ Pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $a \in \mathbb{K}$, $\displaystyle a\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (a\alpha_k) u_k$

❸ Pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) u_k$

Remarques :
- Les points ❷ et ❸ permettront de montrer que $\text{Vect}(u_1, ..., u_n)$ est stable par combinaison linéaire.
- On peut faire des changements indices comme sur les sommes de nombres.

1.3 Exemples de références.

Des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

E : l'ensemble des vecteurs du plan (resp. de l'espace) (avec $0_E = \vec{0}$)
$E = \mathbb{R}^n$, pour n un entier naturel non nul (avec $0_E = (0, 0, \ldots, 0)$)
$E = \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, pour n et m deux entiers naturels non nuls (avec 0_E : la matrice nulle)
(complément) E : l'ensemble des suites réelles (avec 0_E : la suite nulle)
E : l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec 0_E : fonction nulle sur I)
E : l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec 0_E : fonction nulle sur I)
E : l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec 0_E : fonction nulle sur I)
$E = \mathbb{R}[X]$ (avec 0_E : le polynôme nul)
E : l'ensemble des variables aléatoires à valeurs réelles. (avec 0_E : la variable certaine égale à 0.)

Des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :

$E = \mathbb{C}^n$, pour n un entier naturel non nul (avec $0_E = (0, 0, \ldots, 0)$)
$E = \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, pour n et m deux entiers naturels non nuls (avec 0_E : la matrice nulle)
(complément) E : l'ensemble des suites à valeurs complexes (avec 0_E : la suite nulle)
$E = \mathbb{C}[X]$ (avec 0_E : le polynôme nul)

– –

On définit les deux opérations suivantes pour E et F deux espaces vectoriels :

• Pour f une application E dans F et α un scalaire on définit l'application : $\alpha f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \alpha f(u) \end{array}$

• Pour deux applications f et g de E dans F on définit l'application : $f + g : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f(u) + g(u) \end{array}$

L'ensemble des applications de E dans F (noté F^E) muni de ces deux lois est un espace vectoriel.

2

Sous-espace vectoriel

2.1 Définition.

Définition :

Soient $(E\,,+\,,.\,)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E,

Dire que F est **un sous-espace vectoriel** de E signifie que :

$(F\,,+\,,.\,)$ est un espace vectoriel.

Caractérisation :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble

F est **un sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si, :

❶ $F \subset E$. ❷ $0_E \in F$. ❸ $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall(u,v) \in F^2, \quad \alpha u + \beta v \in F$

Remarques :

• Certains remplacent ❷ par $F \neq \varnothing$.
• Certains remplacent ❸ par $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall(u,v) \in F^2, \quad u + \lambda v \in F$
• D'autres remplacent ❸ par $\forall\alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \quad \alpha u \in F.$ et $\forall(u,v) \in F^2, \quad u + v \in F.$
• Le singleton $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E, c'est d'ailleurs le seul qui contient un nombre fini d'éléments. *(Tous les autres contiennent un nombre infini de vecteurs)*

Des exemples dans la feuille_Cours_3

2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 deux parties de E.

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E

alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. *Voir la feuille_Cours_3*

Théorème : *(Généralisation)*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_n$ des parties de E.

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E,

alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Attention : En général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Une condition nécessaire et suffisante : "l'un est inclus dans l'autre" (voir la feuille_Cours_3)

3

Vect$(u_1, \ldots, u_n)$

3.1 Combinaisons linéaires.

Dire qu'un vecteur v de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E signifie qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que : $\quad v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Remarque : Un espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires.

3.2 Définitions - notations.

Définition.

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E,
On note $\mathbf{Vect}(\boldsymbol{u_1, \ldots, u_n})$ l'ensemble des éléments de E qui sont combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$.

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \;\middle|\; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \text{ ou encore } = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \right\}$$

$$\text{Pour } x \in E, \quad x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \iff \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

3.3 C'est un sous-espace vectoriel.

Proposition : Pour $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E, $\quad \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. On note $\boxed{F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)}$ où $u_1, ..., u_n$ sont des vecteurs de E

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et les u_i sont dans E donc $F \subset E$.
- $0_E = \sum_{k=1}^{n} 0 u_k$ donc $0_E \in F$
- Soient $v_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$ et $v_2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k$ deux vecteurs de F et λ_1, λ_2 deux éléments de $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 &= \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_1 \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_2 \beta_k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_1 \alpha_k u_k + \lambda_2 \beta_k u_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_1 \alpha_k + \lambda_2 \beta_k) u_k \\
&\in F
\end{aligned}$$

En conclusion : F est un sous-espace vectoriel.

Remarques :

• $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$
• $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $u_1, \dots, u_n$.
• C'est un autre moyen de montrer qu'une partie de E est un sous-espace vectoriel

3.4 Opérations élémentaires.

On appelle opérations élémentaires sur la famille $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ les transformations :

- Permuter deux vecteurs : $u_i \longleftrightarrow u_j$
- Multiplier un vecteur par un scalaire λ non nul : $u_i \longleftarrow \lambda u_i$
- Ajouter un vecteur à un autre vecteur : $u_i \longleftarrow u_i + u_j$

On combine souvent ces opérations. Par exemple on fait souvent des transvections : $u_i \longleftarrow u_i - \alpha u_j$ avec $i \neq j$

Propositions

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille de vecteurs de E on note : $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_m)$.
❶ On ne modifie pas F en changeant l'ordre des u_i.
❷ On ne modifie pas F par des opérations élémentaires sur les u_i.
❸ On ne modifie pas F en supprimant 0_E s'il est dans la liste des u_i.
❹ On ne modifie pas F en ajoutant à un vecteur u_i une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstrations.

3.5 Familles génératrices.

On note E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.
Définition :

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E
Dire que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une **famille génératrice** de F signifie que, $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

Remarque : En pratique lorsque $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in F^n$,

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une **famille génératrice** de F si et seulement si, $\forall v \in F, \exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : \ v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$

3.6 Espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Dire qu'un espace vectoriel E est de dimension finie signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ tels que :

$$E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

3.7 Bases canoniques.

Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

Dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Dans $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathbb{C}_n[X]$

4 Familles libres.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et n un entier naturel non nul.

4.1 Définition.

Définition :

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E,
dire que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une **famille libre** signifie que,

$$\text{quel que soit } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \text{ si } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \text{ alors } \forall k \in [\![1; n]\!], \quad \lambda_k = 0$$

Remarques :

- La famille est **liée** lorsqu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E$
- $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si, et seulement si, $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \iff \forall k \in [\![1; n]\!],\ \lambda_k = 0$

4.2 Identification.

Théorème (*Unicité de l'écriture sur une famille libre. Identification.*) :

Soient $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.
Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est libre alors on a l'équivalence :

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n \iff (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

En effet :

4.3 Familles de polynômes.

Théorème Toute famille finie de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts est libre.

Démonstration.
(WLOG) on suppose que $0 \leqslant \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n)$

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k = 0$

on raisonne par l'absurde en supposant $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$

en notant : $m = \max(\{k \in [\![1, n]\!] \mid \lambda_k \neq 0\})$ on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k = 0$

comme $\lambda_m \neq 0$, on en déduit que : $P_m = -\dfrac{1}{\lambda_m} \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k P_k$

mais l'hypothèse sur les degrés entraîne que $-\dfrac{1}{\lambda_m} \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k P_k$ est de degré strictement inférieur à $\deg(P_m)$

C'est impossible, donc nécessairement tous les λ_i sont nuls et ainsi la famille est libre. ■

5

Bases.

5.1 Definition d'une base.

Définition :

Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E.
Dire que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E signifie que,
$(u_1, \ldots, u_n)$ est une **famille libre et génératrice** de E.

Remarque : Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre alors c'est une base de $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$.

En effet :

5.2 Caractérisation d'une base.

Théorème :

Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E,
$(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si,

pour tout vecteur v de E, il existe une unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $v = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$

Démonstration.

Rapidement.

D'une part $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice si, et seulement si, $\forall v \in E : \underbrace{\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k}_{\text{existence}}$

D'autre part $(u_1, ..., u_n)$ est libre si, et seulement si,

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\lambda'_1, ..., \lambda'_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k u_k \implies (\lambda_1, ..., \lambda_n) = (\lambda'_1, ..., \lambda'_n)}_{\text{unicité}}$$

On a bien

$$(u_1, ..., u_n) \text{ est libre et génératrice si, et seulement si, } \forall v \in E : \underbrace{\exists! (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k}_{\text{existence et unicité}}$$

6

Coordonnées dans une base.

6.1 Définition.

Définition :

$\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E,

à chaque vecteur v de E on peut associer l'unique matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ telle que : $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$

Cette matrice est appelée : **matrice colonne des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**

On note : $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Remarque : $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$

6.2 Application $v \longmapsto \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$

Proposition :

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E alors
l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à v associe $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme.

Rappels : Φ est linéaire et bijective.

- Linéaire : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u, v) \in E^2,\ \Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha\Phi(u) + \beta\Phi(v)$
- Bijective : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! u \in E :\ \Phi(u) = X$

Démonstration :

Proposition :

Soient $\mathscr{B}$ une base de E et u_1, ... u_n des vecteurs de E.

❶ Pour tout $v \in E$, $v \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \iff \text{Coord}_{\mathscr{B}}(v) \in \text{Vect}(\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n))$

❷ $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si, et seulement si, $(\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n))$ est libre.

Démonstration :

6.3 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition (*Matrice d'une famille de vecteurs dans une base*) :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, à chaque famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_m)$ de E on peut associer l'unique matrice de M de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ telle que : pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, la j-ième colonne de M est $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v_j)$.

Cette matrice est la **matrice de la famille de vecteurs** de $(v_1, \ldots, v_m)$ dans la base $\mathcal{B}$.

On la note : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m)$

Remarques :

- On peut résumer avec la relation.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m) = \Big(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v_1) \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v_m)\Big)$$

- Multiplication par une matrice colonne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} x_k \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v_k)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}\left(\sum_{k=1}^{m} x_k v_k\right)$$

Extrait de la feuille cours_3_2.

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
AX &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{p} \begin{pmatrix} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ a_{n,j} x_j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{p} x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{AX \text{ est une combinaison linéaire des colonnes de } A}$$

7 Dimension d'un espace vectoriel

7.1 Définition.

Théorème et définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie différent de $\{0_E\}$.
❶ E possède au moins une base.
❷ toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.
❸ Le nombre de vecteurs d'une base de E est appelée dimension de E.
on note $\dim(E)$ la dimension de E.

Remarques : L'espace vectoriel $\{0_E\}$ a par convention une dimension nulle. $\dim(\{0_E\}) = 0$.
(*Sa base est la famille vide*)

Théorème.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u_1, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Si $(u_1, ..., u_p)$ est libre alors $p \leqslant \dim(E)$.

Démonstration :
Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.
(On note $\mathscr{B}$ une base de E)
on a donc : *(définition de la liberté)*

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^{p} x_k u_k = 0_E \iff (x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0)$$

ce qui donne dans la base $\mathscr{B}$: en notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots u_p)$

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0)$$

donc le système $MX = 0$ a une unique solution et ainsi il a autant ou plus d'équations que d'inconnues.
(on utilise ici le lemme précédent)

autrement dit $\boxed{p \leqslant n}$.

Corollaire

Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s'il existe une famille libre de n vecteurs de E alors E n'est pas de dimension finie.

Exemples :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \longmapsto x^k)_{1<k\leqslant n}$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc

$$\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ n'est pas de dimension finie}}$$

.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(X^k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ donc

$$\boxed{\mathbb{R}[X] \text{ n'est pas de dimension finie}}$$

.

7.2 Dans une famille libre chaque vecteur donne une nouvelle direction.

Théorème

Soient E un espace vectoriel et $(u_1, ...u_n, v)$ des vecteurs de E.

$(u_1, ..., u_n)$ est libre et si $v \notin \text{Vect} < u_1, ..., u_n >$ si, et seulement si, $(u_1, ..., u_n, v)$ est libre

Démonstration :

Remarques :

- On retrouve qu'une sous-famille d'une famille libre est libre.
-
-

Corollaire

Soient E un espace vectoriel et $(u_1, ...u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$u_1 \neq 0_E$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $u_{k+1} \notin \text{Vect} < u_1, ..., u_k >$ si, et seulement si, $(u_1, ..., u_n)$ est libre

En effet.

Remarque :

On peut avec ce corollaire démontrer un théorème vu plus haut dans ce cours :

7.3 Compléter une famille libre ou extraire d'une famille génératrice.

Théorème.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

❶ De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

❷ Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Remarques :
- Une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de dimension n a au moins n vecteurs.
- Une famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension n a au plus n vecteurs.

Démonstration :

8 Famille libre, famille génératrice et dimension.

n désigne ici un entier naturel non nul.

8.1 Famille génératrice en dimension n.

Théorème :

> Soit E un espace vectoriel de dimension finie et différent de $\{0_E\}$.
> Si E est dimension n, toute famille génératrice de E formée de n vecteurs est une base de E.

Rédaction type : On a montré que $\begin{cases} \mathscr{F} \text{ est génératrice de } E \\ \mathscr{F} \text{ contient } n \text{ vecteurs} \\ \dim(E) = n \end{cases}$ donc $\mathscr{F}$ est une base de E.

En effet.

8.2 Famille libre en dimension n.

Théorème :

> Soit E un espace vectoriel de dimension finie et différent de $\{0_E\}$.
> Si E est dimension n, toute famille libre de E formée de n vecteurs est une base de E.

Rédaction type : On a montré que $\begin{cases} \mathscr{F} \text{ est une famille libre} \\ \mathscr{F} \text{ contient } n \text{ vecteurs de } E \\ \dim(E) = n \end{cases}$ donc $\mathscr{F}$ est une base de E.

En effet.

8.3 Dimension et sous-espace vectoriel.

Proposition.

Soit E un espace vectoriel et F une partie de E,
Si F est un sous-espace vectoriel de E et E est de dimension finie alors F est de dimension finie.

Démonstration :

Théorème :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie,
et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E,

① Si $F \subset G$ alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$

② $\big[\ F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G)\big] \iff F = G$

Démonstration.

9

Systèmes linéaires homogènes et dimension.

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on s'intéresse ici à la résolution du système linéaire $MX = 0$.

p équations et n inconnues.

Rappels :

L'algorithme du pivot de Gauss permet de réduire le système $MX = 0$ en un système échelonné $TX = 0$.
Le nombre de lignes non nuls de $TX = 0$ est égal au nombre d'inconnues principales noté r.

(C'est le rang du système)

Le nombre d'inconnues secondaires vaut $n - r$.

Théorème.

L'ensemble des solutions du système $MX = 0$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - r$.

Démonstration :

Conseil général : N'utilisez ce théorème uniquement si vous êtes sûr de vous et que cela est nécessaire.

Théorème.

S'il y a strictement plus d'inconnues que d'équations ($n > p$)
alors le système $MX = 0$ a une infinité de solutions.
Si $(0, ..., 0)$ est l'unique solution de $MX = 0$,
alors il y a autant ou plus d'équations que d'inconnues ($n \leqslant p$).

– –

Illustration sur un exemple : *Extrait de la feuille_calcul_4*

Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$,

$$u \in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad\quad + 5x_5 & = & 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 0 \\ -5x_3 - 8x_4 - 5x_5 & = & 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 0 \\ -5x_3 - 8x_4 - 5x_5 & = & 0 \\ -3x_4 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \textit{(3 inc. principales et 2 inc. secondaires)}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_2 - 2x_5 \\ x_3 & = & -x_5 \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} \text{donc} \quad F & = & \{(-2x_2 - 2x_5, x_2, -x_5, 0, x_5) \mid (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2 \} \\ & = & \{x_2(-2, 1, 0, 0, 0) + x_5(-2, 0, -1, 0, 1) \mid (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2 \} \end{array}$$

Donc $F = \text{Vect} < (-2, 1, 0, 0, 0), (2, 0, -1, 0, 1) >$ et $((-2, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -1, 0, 1))$ est libre.

F est un sous-espace vectoriel et $((-2, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -1, 0, 1))$ est une base de F.

Remarque : cet espace est de dimension 2, mais il est infini (l'ensemble des solutions est infini)

10

Rangs.

10.1 Rang d'une famille de vecteurs.

Soient E un espace vectoriel et n un entier naturel non nul.
Définition.

Pour $(u_1, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$$\operatorname{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \dim(\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n))$$

Remarque : On ne change pas le rang en faisant des opérations élémentaires sur les vecteurs.

Théorèmes :

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E

❶ $\operatorname{rg}(\mathscr{F})$ est égal au nombre de vecteurs de $\mathscr{F}$. si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est libre

❷ $\operatorname{rg}(\mathscr{F})$ est égal à $\dim(E)$. si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est génératrice de E.

❸ $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \text{ est égal au nombre de vecteurs de } \mathscr{F} \\ \text{et est égal à la dimension de } E\end{array}\right.$ si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une base de E.

Démonstration.

10.2 Rang d'une matrice.

Définition. ***(Définition du rang d'une matrice)***

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,
On appelle rang de la matrice M, la dimension de l'espace engendré par les colonnes de M.
Notation : on note $\operatorname{rg}(M)$ le rang de la matrice M.

Théorèmes :

❶ Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}\left(M^\top\right) = \operatorname{rg}(M)$.
❷ Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(M) = n$ si, et seulement si, M est inversible.

Démonstration.

Remarques :
- Le rang d'une matrice est (*aussi*) la dimension de l'espace engendré par ses lignes.
- On ne modifie pas le rang d'une matrice en faisant des opérations élémentaires sur ses colonnes et ses lignes.
- Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{rg}(M) \leqslant n$ et $\operatorname{rg}(M) \leqslant p$ (ou encore $\operatorname{rg}(M) \leqslant \min(n,p)$)
- On obtient ce rang en appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice.

10.3 Matrices et familles de vecteurs.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition.

Soient $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.

$$\text{rg}\,(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)\right)$$

Démonstration :

Théorèmes.

Soient $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E.
On note $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$

❶ $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre si, et seulement si, $\text{rg}(M) = n$

❷ $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice si, et seulement si, $\text{rg}(M) = \dim(E)$

❸ $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si, M est inversible.

Démonstration :

10.4 Rang d'un système.

Définition :

Le rang d'un système est le nombre d'inconnues principales après réduction par l'algorithme du pivot de Gauss.

Proposition :

Soient $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et Σ le système $MX = B$

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(\Sigma)$$