BCPST 2$_A$

Devoir à la maison à rendre jeudi 10 octobre 2024

Exercice 1 :

Le but de cet exercice est le calcul, en fonction du réel x, de la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \frac{x^n}{n!}$

1) Montrer que : $\quad n^3 \dfrac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} x^3 \dfrac{x^{n-3}}{(n-3)!}$
2) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad S(x)$ est bien définie.
3) Déterminer des réels a, b, c, d tels que : $X^3 = a + b\,X + c\,X(X-1) + d\,X(X-1)(X-2)$.
4) En déduire une expression simple de $S(x)$ en fonction de x.

Exercice 2

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k) = \dfrac{1}{k+1}$.

1) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = \dfrac{1}{2}$.
2) Résoudre le problème pour $n = 2$.
3) Montrer qu'il existe au plus un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k) = \dfrac{1}{k+1}$.
4) (*Analyse*) Pour cette question, on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k) = \dfrac{1}{k+1}$ et on pose $Q(X) = (X+1)P(X) - 1$.
   a) Montrer que chaque entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$ est une racine de $Q(X)$.
   b) En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que : $Q(X) = \lambda \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - k)$
   c) Montrer que l'on a : $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$
5) (*Synthèse*) Pour cette question, on pose $Q = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - k)$
   a) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q(X) + 1 = (X+1)P(X)$.
   b) Conclure.

Problème.

On considère un entier $n \geqslant 3$ et les deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que, $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $N_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On remarquera sans le justifier que :

$$\forall k \in [\![1\,;\,n-1]\!], \quad (N^k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad , \qquad N^n = 0 \qquad \text{et} \qquad A = \sum_{k=0}^{n-1} N^k.$$

On s'intéresse dans ce problème aux puissances de la matrice A.

1) a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = I_n - N$.

b) En déduire pour $k \in \mathbb{N}^*$, une expression de A^{-k} en fonction des puissances de N.

On rappelle que $A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k$.

2) Ici on fixe $\boldsymbol{n = 3}$, on a donc : $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $A = I_3 + N + N^2$ et $N^3 = 0$.

a) Lorsque $k \in \mathbb{N}$, déterminer $(N + N^2)^k$ en fonction de I_3, N, N^2 et k.

b) En déduire , lorsque $k \in [\![2, +\infty[\![$, A^k en fonction de I_3, N, N^2 et k.

c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) En utilisant le résultat de la question 1) b) déterminer les coefficients de la matrice A^{-k} pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3) *On définit une suite de fonctions polynomiales réelles par* $S_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k$. *On notera aussi* $S_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

a) Lorsque $t \in]-1, 1[$, rappeler la limite de $S_n(t)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que, $(1 - X)\,.\,S_n'(X) = S_n(X) - (n+1)X^n$.

c) En déduire, lorsque $t \in]-1, 1[$, que : $S_n'(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{(1-t)^2}$.

d) On fixe n dans $\mathbb{N}^*$, montrer par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(1 - X)\,.\,S_n^{(k)}(X) \;=\; k\,.\,S_n^{(k-1)}(X) \;-\; \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!}\; X^{n-k+1}$$

e) On fixe $t \in]-1, 1[$.

i. Montrer que pour k fixé dans $\mathbb{N}$, : $\dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^p$ où p est un entier à préciser.

ii. On fixe $k \in [\![2, +\infty[\![$ et on suppose que $S_n^{(k-1)}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{(k-1)!}{(1-t)^k}$.

Montrer qu'alors la suite des $\left(S_n^{(k)}(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et identifier sa limite.

iii. Conclure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_n^{(k-1)}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{(k-1)!}{(1-t)^k}$.

4) *D'après le résultat précédent :* *pour* $t \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{(1-t)^k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k-1+i}{k-1} t^i$

Comme $A^k = (I_n - N)^{-k}$ *et que pour* $i \geqslant n$, $N^i = 0$, *cela donne la conjecture :* $A^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k-1+i}{k-1} N^i$

a) Avec le résultat du 2) b) vérifier la conjecture lorsque : $n = 3$ et $k \geqslant 1$.

b) Vérifier la conjecture lorsque : $n \geqslant 3$ et $k = 1$.

c) On fixe un entier $n \geqslant 3$ et on suppose que la conjecture est vraie pour un entier $k \geqslant 1$.

i. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k-1+i}{k-1} N^i\right)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} N^j\right) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{m} \binom{k-1+i}{k-1}\right] N^m$.

ii. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\dbinom{k-1+i}{k-1} = \dbinom{k+i}{k} - \dbinom{k+i-1}{k}$.

iii. En déduire, pour $m \in [\![0, n-1]\!]$, une simplification de $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{k-1+i}{k-1}$.

iv. Conclure que la conjecture est encore vraie au rang $k+1$.

d) Conclure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k-1+i}{k-1} N^i$.