Feuille_Exo_3 : Polynômes.

1) Donner le polynôme dérivé des polynômes suivants :

$P(X) = (X^2-2)(X^2+3X+3)$ $\qquad Q(X) = (X-1)(X+2)+(X-3)(X-4)$ $\qquad R(X) = (X^2+1)^n$

2) Soit $P(X) = 2X^5 - 4X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 4X - 2$,

a. Montrer que 1 est une racine de $P(X)$

b. Montrer que 1 est une racine multiple.

c. En déduire les racines de $P(X)$.

3) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que $(X-1)^2$ divise $\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2X^{n-1}$

4) Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$

a. Montrer que l'application f est bien définie.

b. Montrer que f est surjective.

c. f est elle bijective ?

5) Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$(X^2+1)P'' - 6P = 0$$

6) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$X^4 - X^2 - 2 \qquad X^4 + X^2 + 4 \qquad 1 + X + X^2 + X^3$$

7) a. Développer :

$$\left(X^2 + X + 2\right)^2 - 3(X+1)^2$$

b. En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme $(1-X^2)^3 + 8X^3$.

c. Retrouver ce résultat en passant par les racines complexes.

8) Factoriser le polynome suivant :

$$X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$$

9) Factoriser le polynôme suivant en remarquant que $P(2) = P(4) = 0$:

$$P(X) = 3X^4 - 18X^3 + 27X^2 - 18X + 24$$

10) Déterminer les racines du polynôme suivant : $P(X) = 2X^4 - 5X^3 - 10X^2 + 15X + 18$

Indication : On commencera par déterminer deux racines dans l'ensemble $\{-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\}$

Extrait d'un devoir.

Le but de ce problème est de trouver une fonction f simple et qui vérifie les propriétés suivantes :

$$f \text{ est dérivable sur } [-1;4] \text{ et : } \begin{cases} f(-1)=0 \\ f'(-1)=0 \end{cases}, \begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=1 \end{cases}, \begin{cases} f(2)=2 \\ f'(2)=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} f(4)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases}$$

On note $(*)$ l'ensemble de ces conditions.

I) Une illustration graphique.

Faire la représentation graphique d'une fonction f vérifiant les conditions $(*)$

II) Une solution polynomiale.

1) Montrer que si P est une fonction polynomiale réelle vérifiant les conditions $(*)$ alors $\deg(P) \geqslant 4$.
2) Un calcul a permis de trouver une fonction polynomiale de degré 7 vérifiant les conditions $(*)$
   Parmi les fonctions polynômiales suivantes, seule une correspond à la solution du problème.
   Déterminer laquelle est la bonne.

   (On pourra procéder par élimination sachant qu'il y en a une de correct)

$$P_1 : x \longmapsto \frac{1}{16}\left(\frac{119}{324}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)(x+1)^2(x-4)^3$$

$$P_2 : x \longmapsto \frac{1}{16}\left(-\frac{47}{648}x^3 + \frac{119}{324}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)(x+1)^2(x-4)^2$$

$$P_3 : x \longmapsto \frac{1}{16}\left(-\frac{47}{648}x^4 + \frac{119}{324}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)(x+1)(x-4)^2$$

$$P_4 : x \longmapsto \frac{1}{16}\left(x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)(x+1)^2(x-4)^2$$

3) Montrer qu'il n'y a pas d'autre polynôme de degré inférieur ou égal à 7 vérifiant les conditions $(*)$.

   Indication : On prendra P et Q deux fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 7 et vérifiant les conditions $(*)$, puis on démontrera que cela entraîne $P - Q = 0$.

III) Une solution polynomiale par morceaux.

1) Déterminer une fonction polynomiale f_1 de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$f_1(-1) = 0, \quad f_1'(-1) = 0, \quad f_1(0) = 1 \text{ et } \quad f_1'(0) = 1.$$

2) Déterminer une fonction polynomiale f_2 de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$f_2(0) = 1, \quad f_2'(0) = 1, \quad f_2(2) = 2 \text{ et } \quad f_2'(2) = 0.$$

3) Déterminer une fonction polynomiale f_3 de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$f_3(2) = 2, \quad f_3'(2) = 0, \quad f_3(4) = 0 \text{ et } f_3'(4) = 0.$$

4) En déduire une fonction f simple vérifiant les conditions $(*)$.

Le sujet se poursuivait pour généraliser cette approche.