## Généralités.

Dans ce chapitre n, r, q et p sont des entiers naturels **non nuls**, Les éléments de  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{C}$  sont appelés **nombres** ou **scalaires**.

## 1.1 Généralités.

#### Définition:

Une matrice de taille (n, p) est un **tableau rectangulaire de nombres** comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

Notation : 
$$A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$$
 ou  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ 

On notera ici  $(A)_{i,j}$  le **coefficient** de A se trouvant à la i-ème ligne et à la j-ième colonne

On note :  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices  $n \times p$ , et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées  $n \times n$ .

# 1.2 Des cas particuliers.

- Si n = 1, on dit que la matrice A est une matrice ligne.
- Si p = 1, on dit que la matrice A est une matrice colonne.
- Pour A une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  on appelle :
  - $-i^{\text{ième}}$  ligne de A est la matrice ligne  $(a_{i,1}\ a_{i,2}\ \dots\ a_{i,p}).$
  - $-j^{\text{ième}}$  colonne de A est la matrice colonne  $\left(\begin{array}{c}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{n,j}\end{array}\right).$
- La matrice nulle à n lignes et p colonnes est la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  avec que des coefficients nuls.
- Si n = p, on dit que la matrice A est une matrice carrée.
- Lorsque A est une matrice carrée, on dit qu'elle est :
  - triangulaire supérieure lorsque  $\forall (i,j) \in [1,n]^2, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0,$
  - triangulaire inférieure lorsque  $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0,$
  - **diagonale** lorsque  $\forall (i,j) \in [1,n]^2$ ,  $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ ,
- La matrice identité de dimension n (nécessairement une matrice carrée) notée  $I_n$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ :

$$\left(\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

# Opérations.

#### 2.1 Combinaisons linéaires de matrices.

#### 2.1.1Combinaison linéaire.

## Définition:

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\alpha$ ,  $\beta$  deux scalaires.

La matrice  $\alpha A + \beta B$  est la matrice  $(\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ 

#### 2.1.2Propriétés.

Soit A, B et C trois matrices de même taille, k et k' deux scalaires, on a alors :

- 1. (A+B) + C = A + (B+C)
- 2. A + 0 = 0 + A = A
- ( 0 matrice nulle de même taille que A )
- 3. A + (-A) = (-A) + A = 0
- (où -A est la matrice (-1)A)

- 4. A + B = B + A
- 5. k(A + B) = kA + kB
- 6. (k + k')A = kA + k'A
- 7. (kk')A = k(k'A)
- 8. 0A = 0
- 9. 1A = A

#### 2.2Produit de deux matrices.

#### 2.2.1Définition.

#### Définition:

et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant r}}$ Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ 

le produit AB est la matrice  $C = (c_{i,j}) \underset{1 \leqslant j \leqslant r}{\underset{1 \leqslant j \leqslant r}{\leq i}} \text{ avec}: \forall (i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,r \rrbracket \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j}$ 

#### Propriétés. 2.2.2

#### Propriétés

- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ :  $AI_q = I_p A = A$
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $(B, B') \in M_{q,r}(\mathbb{K})^2$ : A(B+B') = AB + AB'
- Pour tout  $(A, A') \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$ ,  $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ : (A + A')B = AB + A'B
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$ :  $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$  on a : A(BC) = (AB)C

### 2.2.3 Loi non commutative, non intègre.

- Il existe des matrices A et B telles que  $AB \neq BA$ .

(On dit que la multiplication des matrices carrés n'est pas une loi commutative).

- L'égalité AB=0 n'entraı̂ne pas nécessairement A=0 ou B=0

(On dit que la multiplication n'est pas une loi intègre)

En revanche les deux propositions sont vraies.

#### **Propositions:**

- **•** Pour tout  $k \in \mathbb{R}$  et tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , kA = 0 équivaut à k = 0 ou A = 0.
- **9** Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , si  $(\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0)$  alors A = 0

#### 2.2.4 Cas particuliers.

- Avec les matrices nulles :  $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \quad A \, 0_{n,r} = 0_{p,r} \text{ et } 0_{r,p} \, A = 0_{r,n}.$
- Avec les matrices identités :  $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \quad A I_n = A \text{ et } I_p A = A.$
- Produit d'une matrice et d'une matrice colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix}}_{} + \underbrace{x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{p,2} \end{pmatrix}}_{} + \cdots + \underbrace{x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix}}_{}$$

Combinaison linéaire des colonnes de A

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix}$$

• Produit d'une matrice et d'une matrice ligne.

• Produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_p \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_p \end{pmatrix}$$

• Produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{pmatrix}$$

3

**Remarque**: Nous reverrons ce genre de produit dans le cours sur le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ .

• Produit d'une matrice par une matrice diagonale.

#### A droite:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{1,2} & \cdots & \lambda_n a_{1,n} \\ \lambda_1 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \cdots & \lambda_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 a_{p,1} & \lambda_2 a_{p,2} & \cdots & \lambda_n a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Multiplier à droite par une matrice diagonale, revient à multiplier les colonnes  $C_i$  de A par  $\lambda_i$ .

### A gauche:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1}a_{1,1} & \lambda_{1}a_{1,2} & \cdots & \lambda_{1}a_{1,n} \\ \lambda_{2}a_{2,1} & \lambda_{2}a_{2,2} & \cdots & \lambda_{2}a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p}a_{p,1} & \lambda_{p}a_{p,2} & \cdots & \lambda_{p}a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Multiplier à gauche par une matrice diagonale, revient à multiplier les lignes  $L_i$  de A par  $\lambda_i$ .

#### • Produit de deux matrices diagonales.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

• Produit de deux matrices triangulaires.

#### Proposition:

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

Démonstration. (bon exercice)

Remarque: On peut énoncer le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures.

## 2.3 Lignes et colonnes de AB. (Complément)

• Si on note  $C_j$  les colonnes de B alors la  $j^{\text{ième}}$  colonne de AB est  $AC_j$ :

$$A\underbrace{\left(C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_q\right)}_{R} = \underbrace{\left(AC_1 \mid AC_2 \mid \cdots \mid AC_q\right)}_{AR}$$

 ${f Cons\'equence}$  : Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A.

• Si on note  $L_i$  les lignes de A alors la  $i^{\text{ième}}$  ligne de AB est  $L_iB$ :

$$\begin{pmatrix}
L_1 \\
L_2 \\
\vdots \\
L_p
\end{pmatrix} B = \begin{pmatrix}
L_1 B \\
L_2 B \\
\vdots \\
L_p B
\end{pmatrix}$$

4

Conséquence : Les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B.

## 2.4 Puissance d'une matrice carrée.

#### 2.4.1 Définition.

Soit A une matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ 

$$A^0 = I_p \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = A \times A^n \quad (\text{ou} = A^n \times A)$$

### 2.4.2 Cas particuliers.

• Puissance de  $I_p$  (la matrice identité) et de  $O_p$  (la matrice nulle).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_p^n = I_p \qquad O_p^0 = I_p \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad O_p^n = O_p$$

• Matrices diagonales.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}$$

• Matrices triangulaires.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}$$

#### 2.4.3 Formule du binôme.

Théorème Formule du binôme.

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  deux matrices carrées telles que AB = BA

(On dit que A et B commutent).

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 

$$(A+B)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k} B^{n-k} \qquad (A+B)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^{k}$$

#### 2.4.4 Formule de Bernoulli.

Théorème | Formule de Bernoulli.

Soit  $A\in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$  et  $B\in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$  deux matrices carrées telles que AB=BA

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A - B) \sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k}$$
 
$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A - B) \sum_{k=0}^{n} A^{n-k} B^k$$

## Matrice inversible.

Dans ce paragraphe toutes les matrices sont carrées.

#### 3.1 Définition.

### **Définitions**

Soit A une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (une matrice carrée)

Dire que A est inversible signifie qu'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$AB = BA = I_n$$
 (où  $I_n$  est la matrice identité)

La matrice B est alors unique et est appelée inverse de la matrice A on la note  $A^{-1}$ 

#### 3.2Matrice inversible et systèmes.

#### Théorème.

Soit  $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ,

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\bullet$  A est inversible
- **2** Le système AX = 0 admet une unique solution.
- **3** quel que soit  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système AX = Y admet une unique solution.

#### 3.2.1 Résoudre un système pour trouver l'inverse.

### En pratique:

On prend un second membre quelconque Y et on résout le système AX = Y.

si on montre qu'il n'a qu'une solution, A est inversible sinon elle ne l'est pas.

Si on montre que l'unique solution s'exprime X = MY avec M une matrice  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors  $M = A^{-1}$ 

#### Inverse d'un produit. 3.3

#### Théorème :

Soient M et N deux matrices carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

Si M et N sont inversibles alors, le produit MN est inversible et  $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ 

#### **Propositions** Généralisation.

① Soient  $A_1, A_2, \ldots, A_p$ , p matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , p interface G. As  $A_1, A_2, \dots, A_p$  and  $A_1, A_2, \dots, A_p$  est inversible et  $A_1, A_2, \dots, A_p$  est inversible et  $(A_1, A_2, \dots, A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \dots A_1^{-1}$ 

et 
$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^{-1} = A^{-1} A^{-1} \cdots A_n^{-1}$$

② Soit p un entier naturel et A une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

 $A^p$  est inversible et  $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$  (noté  $A^{-p}$ )  ${f Si}\ A$  est inversible , alors

## 3.4 Cas particuliers.

## 3.4.1 Matrice diagonale.

#### Matrices diagonales.

Soient 
$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$
 et  $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 

 $\forall i \in [1, n], \ \alpha_i \neq 0$  si, et seulement si, A est inversible.

et alors 
$$A^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

#### Démonstration :

**Remarque :** on retrouve que la matrice identité est inversible et  $I_n^{-1} = I_n$ .

### 3.4.2 Matrice triangulaire.

### Théorème :

Soit  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire supérieure,

T est inversible si, et seulement si, les coefficients diagonaux de T sont tous non nuls.

et alors  $T^{-1}$  est une matrice triangulaire supérieure.

**Remarque**: Si T est inversible alors les coefficients diagonaux de  $T^{-1}$  sont les inverses de ceux de T.

Démonstration.

### 3.4.3 Les matrices $2 \times 2$ . Déterminant.

Pour 
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
,

A est inversible si, et seulement si,  $ad - bc \neq 0$ .

et sous cette condition:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Définition : (uniquement pour les matrices $2 \times 2$ )

On appelle déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , le nombre : ad - bc.

On note : 
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
 ou  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 

7

# Matrice transposée.

## 4.1 Définition.

#### Définition

Soit A une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,

on appelle **transposée** de A la matrice B de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  (notée  ${}^t\!A$  ou  $A^\intercal$ ) telle que :

$$\forall (i,j) \in [1;p] \times [1;n] \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

## 4.2 Propriétés.

### Proposition:

Soient  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  deux matrices et un scalaire k alors :

 $(kA)^{\top} = k A^{\top}$ 

 $(A+B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}$ 

Si A et B sont de mêmes tailles

 $(AB)^\top = B^\top A^\top$ 

Si le produit AB est définie

# 4.3 Inverse et transposée.

Théorème : Transposée de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée,

A est inversible **si, et seulement, si**  $A^{\top}$  est inversible et alors  $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$ 

# 4.4 Matrices symétriques, antisymétriques.

#### Définitions:

Soit A une matrice carrée,

A est **symétrique**, signifie que  $A^{\top} = A$ 

A est antisymétrique, signifie que  $A^{\top} = -A$ 

### Proposition:

Soit A une matrice carrée, si A est inversible et symétrique alors  $A^{-1}$  est symétrique.

 $\mathbf{Un\ exercice:}\ (\textit{exemple ultra-classique d'analyse-synth}\grave{e}se)$ 

Montrer que :

Toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.