Table des matières

1 Généralités.

Dans ce chapitre n, r, q et p sont des entiers naturels **non nuls**,
Les éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres** ou **scalaires**.

1.1 Généralités.

Définition :

Une matrice de taille (n, p) est un **tableau rectangulaire de nombres** comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

Notation : $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ ou $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$

On notera ici $(A)_{i,j}$ le **coefficient** de A se trouvant à la i-ème ligne et à la j-ième colonne

On note : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$, et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.

1.2 Des cas particuliers.

- Si $n = 1$, on dit que la matrice A est une **matrice ligne**.
- Si $p = 1$, on dit que la matrice A est une **matrice colonne**.
- Pour A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle :
  - $i^{\text{ième}}$ ligne de A est la matrice ligne $(a_{i,1}\ a_{i,2}\ \dots\ a_{i,p})$.
  - $j^{\text{ième}}$ colonne de A est la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

- La **matrice nulle** à n lignes et p colonnes est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec que des coefficients nuls.

- Si $n = p$, on dit que la matrice A est une matrice **carrée**.

- Lorsque A est une matrice carrée, on dit qu'elle est :

  - **triangulaire supérieure** lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$,

  - **triangulaire inférieure** lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$,

  - **diagonale** lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$,

- La **matrice identité** de dimension n (*nécessairement une matrice carrée*) notée I_n est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Opérations.

2.1 Combinaisons linéaires de matrices.

2.1.1 Combinaison linéaire.

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et α, β deux scalaires.

La matrice $\alpha A + \beta B$ est la matrice $(\alpha\, a_{i,j} + \beta\, b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

2.1.2 Propriétés.

Soit A, B et C trois matrices de même taille, k et k' deux scalaires, on a alors :

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A+0 = 0+A = A$ (0 *matrice nulle de même taille que* A)
3. $A+(-A) = (-A)+A = 0$ (où $-A$ est la matrice $(-1)\,A$)
4. $A+B = B+A$
5. $k(A+B) = kA+kB$
6. $(k+k')A = kA+k'A$
7. $(kk')A = k(k'A)$
8. $0A = 0$
9. $1A = A$

2.2 Produit de deux matrices.

2.2.1 Définition.

Définition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$,

le produit AB est la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$ avec : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$ $\quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$

2.2.2 Propriétés.

Propriétés

- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: $\quad AI_q = I_p\, A = A$
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(B,B') \in M_{q,r}(\mathbb{K})^2$: $\quad A(B+B') = AB + AB'$
- Pour tout $(A,A') \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: $\quad (A+A')B = AB + A'B$
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$: $\quad (\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ on a : $\quad A(BC) = (AB)C$

2.2.3 Loi non commutative, non intègre.

- Il existe des matrices A et B telles que $AB \neq BA$.

*(On dit que la multiplication des matrices carrés n'est pas une loi **commutative**).*

- L'égalité $AB = 0$ n'entraîne pas nécessairement $A = 0$ ou $B = 0$

(*On dit que la multiplication **n'est pas une loi intègre***)

En revanche les deux propositions sont vraies.

Propositions :

❶ Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\quad kA = 0$ équivaut à $k = 0$ ou $A = 0$.

❷ Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, **si** $(\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0)$ **alors** $A = 0$

2.2.4 Cas particuliers.

- Avec les matrices nulles : $\forall A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \quad A\,0_{n,r} = 0_{p,r}$ et $0_{r,p}\,A = 0_{r,n}$.
- Avec les matrices identités : $\forall A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \quad A\,I_n = A$ et $I_p\,A = A$.
- Produit d'une matrice et d'une matrice colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{p,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{Combinaison linéaire des colonnes de } A}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{pmatrix}$$

- Produit d'une matrice et d'une matrice ligne.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{Combinaison linéaire des lignes de } A}$$

- Produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_p \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_p \end{pmatrix}$$

- Produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)$$

Remarque : Nous reverrons ce genre de produit dans le cours sur le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

- Produit d'une matrice par une matrice diagonale.

A droite :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{1,2} & \cdots & \lambda_n a_{1,n} \\ \lambda_1 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \cdots & \lambda_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \lambda_1 a_{p,1} & \lambda_2 a_{p,2} & \cdots & \lambda_n a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Multiplier à droite par une matrice diagonale, revient à multiplier les colonnes C_j de A par λ_j.

A gauche :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_1 a_{1,2} & \cdots & \lambda_1 a_{1,n} \\ \lambda_2 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \cdots & \lambda_2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \lambda_p a_{p,1} & \lambda_p a_{p,2} & \cdots & \lambda_p a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Multiplier à gauche par une matrice diagonale, revient à multiplier les lignes L_i de A par λ_i.

- **Produit de deux matrices diagonales.**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

- **Produit de deux matrices triangulaires.**

Proposition :

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Démonstration. *(bon exercice)*

Remarque : On peut énoncer le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures.

2.3 Lignes et colonnes de AB. (Complément)

- Si on note C_j les colonnes de B alors la $j^{\text{ième}}$ colonne de AB est AC_j :

$$A\underbrace{\left(C_1 \,|\, C_2 \,|\, \cdots \,|\, C_q\right)}_{B} = \underbrace{\left(AC_1 \,|\, AC_2 \,|\, \cdots \,|\, AC_q\right)}_{AB}$$

Conséquence : Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A.

- Si on note L_i les lignes de A alors la $i^{\text{ième}}$ ligne de AB est L_iB :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_p \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} L_1B \\ \hline L_2B \\ \hline \vdots \\ \hline L_pB \end{pmatrix}$$

Conséquence : Les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B.

2.4 Puissance d'une matrice carrée.

2.4.1 Définition.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_p \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = A \times A^n \qquad (\text{ou} = A^n \times A)$$

2.4.2 Cas particuliers.

• Puissance de I_p (*la matrice identité*) et de O_p (*la matrice nulle*).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_p^n = I_p \qquad O_p^0 = I_p \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad O_p^n = O_p$$

• Matrices diagonales.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {\lambda_p}^n \end{pmatrix}$$

• Matrices triangulaires.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & * & \cdots & * \\ 0 & {\lambda_2}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & {\lambda_p}^n \end{pmatrix}$$

2.4.3 Formule du binôme.

Théorème *Formule du binôme.*

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices carrées telles que $\boldsymbol{AB = BA}$

(*On dit que A et B* ***commutent***),

pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \qquad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

2.4.4 Formule de Bernoulli.

Théorème *Formule de Bernoulli.*

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices carrées telles que $\boldsymbol{AB = BA}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B) \sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k} \qquad A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B) \sum_{k=0}^{n} A^{n-k} B^k$$

3 Matrice inversible.

Dans ce paragraphe toutes les matrices sont carrées.

3.1 Définition.

Définitions

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (une matrice carrée)
Dire que A est **inversible** signifie qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n \qquad \text{(où } I_n \text{ est la matrice identité)}$$

La matrice B est alors unique et est appelée **inverse** de la matrice A on la note A^{-1}

3.2 Matrice inversible et systèmes.

Théorème.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Les propositions suivantes sont équivalentes :

❶ A est inversible
❷ Le système $A\,X = 0$ admet une unique solution.
❸ quel que soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $A\,X = Y$ admet une unique solution.

3.2.1 Résoudre un système pour trouver l'inverse.

En pratique :
On prend un second membre quelconque Y et on résout le système $AX = Y$.
si on montre qu'il n'a qu'une solution, A est inversible sinon elle ne l'est pas.
Si on montre que l'unique solution s'exprime $X = MY$ avec M une matrice $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors $M = A^{-1}$

3.3 Inverse d'un produit.

Théorème :

Soient M et N deux matrices carrées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

Si M et N sont inversibles **alors,** le produit MN est inversible et $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

Propositions *Généralisation.*

① Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$, p matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $A_i \in GL_n(\mathbb{K})$ **, alors** le produit $A_1 A_2 \cdots A_p$ est inversible
et $(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$
② Soit p un entier naturel et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Si A est inversible **, alors** A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$ (noté A^{-p})

3.4 Cas particuliers.

3.4.1 Matrice diagonale.

Matrices diagonales.

Soient $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \text{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \neq 0 \ \textbf{ si, et seulement si, } \ A \text{ est inversible.}$$

$$\text{et alors} \quad A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

Démonstration :

Remarque : on retrouve que la matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

3.4.2 Matrice triangulaire.

Théorème :

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure,

T est inversible **si, et seulement si,** les coefficients diagonaux de T sont tous non nuls.

et alors T^{-1} est une matrice triangulaire supérieure.

Remarque : Si T est inversible alors les coefficients diagonaux de T^{-1} sont les inverses de ceux de T.

Démonstration.

3.4.3 Les matrices 2×2. Déterminant.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

A est inversible **si, et seulement si,** $ad - bc \neq 0$.

et sous cette condition :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition : (**uniquement pour les matrices 2 × 2**)

On appelle déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le nombre : $ad - bc$.

$$\text{On note : det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

4 Matrice transposée.

4.1 Définition.

Définition

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
on appelle **transposée** de A la matrice B de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (notée ${}^tA$ ou $A^\intercal$) telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!] \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

4.2 Propriétés.

Proposition :

Soient A et B deux matrices et un scalaire k alors :

① $\left(A^\top\right)^\top = A$

② $(kA)^\top = k\,A^\top$

③ $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ *Si A et B sont de mêmes tailles*

④ $(AB)^\top = B^\top A^\top$ *Si le produit AB est définie*

4.3 Inverse et transposée.

Théorème : *Transposée de l'inverse d'une matrice*

Soit A une matrice carrée,

A est inversible **si, et seulement, si** $A^\top$ est inversible et alors $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$

4.4 Matrices symétriques, antisymétriques.

Définitions :

Soit A une matrice carrée,

A est **symétrique**, signifie que $A^\top = A$ A est **antisymétrique** , signifie que $A^\top = -A$

Proposition :

Soit A une matrice carrée, si A est inversible et symétrique alors A^{-1} est symétrique.

Un exercice : (*exemple ultra-classique d'analyse-synthèse*)

Montrer que :
Toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.