Table des matières

1 Généralités.

Il existe différentes méthodes pour résoudre un système : substitution, pivot de gauss, analyse-synthèse ...

L'objectif de ce cours :

❶ Définir le vocabulaire associé à la résolution des systèmes : solutions, second membre, équations, inconnues, rang, pivots, inconnus principales, secondaires, systèmes compatibles, système échelonné ...

❷ Savoir réduire un système linéaire par une méthode appelée méthode du pivot.

❸ Savoir écrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

❹ Connaître des conditions permettant d'affirmer qu'un système a une unique solution, une infinité ou aucune.

1.1 Définitions.

Un système d'équations linéaires est un système d'équations de la forme :

$$(\Sigma)\ :\quad \left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \quad\vdots \qquad \vdots & \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{array}\right.$$

C'est un système à ***p* équations et *n* inconnues**. (ou encore p **lignes** et n inconnues).

Les $a_{i,j}$ et les b_i sont des nombres réels (ou complexes).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}}_{\text{coefficients}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{inconnues}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{\text{second membre}}$$

On peut aussi écrire tout cela sous forme condensée :

$$\forall i \in [\![1;p]\!],\quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ = \ b_i$$

Résoudre le système (Σ) revient à déterminer tous les $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vérifiant toutes les égalités du système.

L'ensemble des solutions est une partie de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$).

Chaque solution est un n-uplet, une n-liste, elle s'écrit avec des parenthèses : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

L'ensemble des solutions est :

$$S_\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \forall i \in [\![1;p]\!],\quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \ = \ b_i \right\}$$

Résoudre le système revient à écrire cette ensemble sous forme paramétrée. $\quad \{f(t) \mid t \in I\}$

Vocabulaire.
• Lorsque un système n'a pas de solution, ont dit qu'il est **incompatible**.

• **Système de Cramer** : *(Ne pas en abuser vous dites vite des bêtises)*
Dire qu'un système est de Cramer signifie qu'il possède autant de lignes que d'inconnues **et** qu'il a exactement une solution.

• **Systèmes homogènes.**
On dit qu'un système est homogène lorsque son second membre est une colonne de zéro.

$$(\Sigma_0) \ : \ \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0 \end{array} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0 \end{array} \right.$ est le système homogène associé au système $\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{array} \right.$

Remarque : on parle aussi de système sans second membre.

1.2 Ensemble des solutions.

Théorème :

L'ensemble des solutions d'un système homogène de p lignes, n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Théorème :

Soit (Σ) un système linéaire et (Σ_0) son système homogène associé.
Si on connait une solution $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ une solution de (Σ) et S_0 l'ensemble des solutions de (Σ_0),
alors l'ensemble des solutions de (Σ) est :

$$S = \big\{ \alpha + t \mid t \in S_0 \big\}$$

Proposition :

Un système linéaire possède zéro, une ou une infinité de solutions.

1.3 Cas particulier des systèmes 2×2.

Théorème :

Pour a, b, c, a', b', c' des nombres réels (resp. complexes), on a l'équivalence suivante :
$\left\{ \begin{array}{l} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right.$ a un unique couple solution dans $\mathbb{R}^2$ (resp. dans $\mathbb{C}^2$)
si, et seulement si, $\boldsymbol{ab' - a'b \neq 0}$

Définition :

Le nombre complexe $ab' - a'b$ est appelé **déterminant** du système : $\left\{ \begin{array}{l} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right.$

On note : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

2

Systèmes triangulaires sans zéro sur la diagonale.

Ici $n = p$, il y a autant d'inconnues que d'équations.

Théorème :

Pour un système triangulaire (Σ) on a l'équivalence :

(Σ) possède une et une seule solution **si, et seulement si,** (Σ) est sans zéro sur sa diagonale.

C'est un outil important de rédaction.

Exemple : Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système suivant possède une et une seule solution :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 + & 2mx_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & mx_2 & + & 3x_3 & = & m \\ & & & (m^2-1)x_3 & = & m^2 \end{array}\right.$$

Rédaction :

Ce système est triangulaire, donc il a une unique solution si, et seulement si, les coefficients diagonaux sont non nuls.

$\boxed{\text{Ce système a une unique solution si, et seulement si, } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}}$

3

Systèmes sous forme échelon.

Exemple : le système suivant est dit sous forme échelon.

$$(\Sigma)\ \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = -1 \\ & & & & -3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = -1 \\ & & & & & & 3x_4 & + & 3x_5 & = -6 \end{array}\right.$$

Définition : (*définition d'une écriture.*)

On dit qu'un système linéaire est **sous forme échelon** lorsque :
- Chaque ligne comporte au moins une inconnue.
et
- La première inconnue d'une ligne n'apparaît plus dans les lignes suivantes.

Remarques : Dans un système sous forme échelon :

- Il y a nécessairement moins d'équations que d'inconnues. ($n \geqslant p$).
- Si $\boldsymbol{n = p}$ le système sous forme échelon est un système triangulaire sans zéro sur la diagonale.

Séparation des inconnues :

Le système précédent est équivalent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & - & 2x_2 & - & x_5 \\ & & -3x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & & & + & x_5 \\ & & & & 3x_4 & = & -6 & & & - & 3x_5 \end{array}\right.$$

Ainsi si on fixe x_2 et x_5 on obtient un système à trois inconnues x_1, x_2 et x_3, qui possède une unique solution.

Définitions :

Dans un système sous forme échelon :
Les **inconnues principales** sont celles qui apparaissent en premier sur chaque ligne et les autres sont appelées **inconnues secondaires**.
On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne.

Remarques :

Soit (Σ) un système linéaire avec p équations et n inconnues.

- Si (Σ) est échelonné alors il y a p inconnues principales et $n-p$ inconnues secondaires.
- En fixant arbitrairement la valeur des inconnues secondaires **on se ramène à un système triangulaire sans zéros sur la diagonale** en les inconnues principales.
- On peut fixer arbitrairement la valeur des inconnues secondaires, le système a alors une unique solution.
- Le nombre d'inconnues secondaires donnent **le nombre de paramètres utilisés pour décrire** l'ensemble des solutions. (*c'est le nombre optimal de paramètres*)
- Si $p < n$ **le système sous forme échelon** a une infinité de solutions.

En pratique :

Résoudre un système échelonné revient à exprimer toutes les inconnues en fonction des inconnues secondaires.

4

Méthode du pivot.

4.1 Opérations élémentaires.

Définition :

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système les actions suivantes :

- Permuter deux lignes. $L_i \longleftrightarrow L_j$. (*Permutation*)
- Multiplier une équation par β un nombre **non nul**. $\beta L_i \longrightarrow L_i$ (*Dilatation*)
- Remplacer une équation L_i par $L_i + \alpha L_j$ avec $i \neq j$. $L_i + \alpha L_j \longrightarrow L_i$ (*Transvection*)

Remarque : En faisant des opérations élémentaires on ne change pas les solutions d'un système.

4.2 Méthode du Pivot.

A l'aide d'une succession finie d'opérations élémentaires sur les lignes on se ramène à :

- un système triangulaire sans zéro sur la diagonale (*une unique solution*),
- un système échelonné avec strictement plus d'inconnues que d'équations (*une infinité de solutions*),
- ou un système incompatible (*sans solution*).

Première étape :
On place à la première ligne une ligne avec x_1 (si il y en a sinon on passe à x_2 ...), on a alors $a_{1,1} \neq 0$,
puis on utilise cette ligne pour supprimer x_1 dans les lignes suivantes ; pour cela on fait des opérations élémentaires de la forme $L_i + \lambda L_1 \to L_1$.

Après cette première étape on n'utilise plus la ligne L_1. (*et on ne la modifie plus*)

Deuxième étape :
On cherche un coefficient non nul en dessous de $a_{1,2}$, (*conformément à l'illustration ci-dessous on suppose que tous les coefficients sont nuls et on passe à* x_3) on permute les lignes pour avoir $a_{2,3} \neq 0$, puis on utilise cette ligne pour supprimer x_3 dans les lignes suivantes ; pour cela on fait des opérations élémentaires de la forme $L_i + \lambda L_2 \to L_2$

Après cette deuxième étape on n'utilise plus la ligne L_2. (*et on ne la modifie plus*)

ainsi de suite ...

Finalement on parvient à un système de la forme : (*une forme réduite du système*)

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}
\boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
\boxed{a_{2,3}}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
\ddots \qquad\qquad \\
\ddots \qquad \\
\ddots \quad \\
\boxed{a_{r,n}}x_n = b_r
\end{array}\right] \quad \text{système sous forme échelon } r \times n \\
\\
\left.\begin{array}{r}
0 = b_{r+1} \\
\vdots \\
0 = b_p
\end{array}\right] \quad (p - r) \text{ conditions de compatibilité}
\end{array}\right.$$

Une fois sous cette forme on peut **discuter et décrire l'ensemble des solutions** :

❶ Si une des conditions de compatibilité n'est pas vérifiée, Il n'y a pas de solutions $S = \varnothing$

❷ Sinon on se ramène à la résolution :

• d'un système sous forme échelon. (*Inconnues principales en fonction des secondaires*)
ou • d'un système triangulaire avec une unique solution.