

La colle commencera par deux questions de cours sur le modèle des questions données au verso.

Ces deux questions peuvent se résumer à l'énoncer d'une définition et/ou d'un théorème.

L'une des 3 démonstrations peuvent être demandés, mais les élèves pourront demander une autre question de cours s'ils ne la connaissent pas.

Ensuite les exercices porteront sur les chapitres "Polynômes" et "Espaces vectoriels".

- **Polynômes.**

Les opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.

Unicité de l'écriture des polynômes : un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.

Coefficient dominant et degré d'un polynôme. Degré d'une somme, d'un produit de polynômes.

Définition d'une racine α d'un polynôme P .

Théorème : $P(\alpha) = 0$ si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$. (**Démonstration**)

Généralisation à plusieurs racines distinctes.

Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Ordre de multiplicité d'une racine.

La caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés n'est pas un attendu du programme. (*La notion de dérivé d'un polynôme n'est d'ailleurs pas dans le programme de BCPST*)

Cas des polynômes réels : si α est racine, $\bar{\alpha}$ est aussi racine. (**Démonstration**)

Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$. *Ce théorème est admis.*

La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est hors programme.

- **Révisions : Matrices et systèmes linéaires.**

Opérations sur les matrices. Propriétés. Matrice inversible. Matrice transposée.

Matrices colonnes, lignes, triangulaires.

Résolution de système par la méthode du pivot. Notion d'inconnues principales et d'inconnues secondaires.

- **Espaces vectoriels.**

Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.

Espaces vectoriels de référence : \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des applications de I dans \mathbb{K}

Sous-espace vectoriel. Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Propriétés. **Démonstration** de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel.

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice.

Théorème : Toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

(Démonstration)

Base d'un espace vectoriel. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. (*Nous utilisons les notations $\text{Coord}_B(u)$ pour un vecteur u et $\text{Mat}_B(u_1, \dots, u_n)$ pour une famille.*)

Base canonique de \mathbb{K}^n et de $\mathbb{K}_n[X]$.

On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

De toute famille génératrice finie d'un espace E non réduit au vecteur nul on peut extraire une base.

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E . Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$

Dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$:

- Toute famille libre peut se compléter en une base.
- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Une famille libre ayant n éléments est une base.
- Toute famille génératrice a au moins n éléments.
- Une famille génératrice ayant n éléments est une base.

Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

si de plus les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.

Pas encore la notion de rang.

- **Python.**

Fonctions autour de la notion de polynômes représentés par la liste de ses coefficients.

Algorithme de dichotomie pour déterminer une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$

Représentation graphique sans `numpy`. (*comprendre comment faire une subdivision d'un segment $[a, b]$*)

Exemples de questions de cours :

- Définition de la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Définition de la matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base.
- Exercices de révisions sur les matrices.
- Montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E est une base de E .
- Détermination des coordonnées d'un vecteurs dans une base.
- Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel de référence est un sous-espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille finie de vecteurs est libre. (Familles de fonctions, de polynomes, de matrices).
- Donner la définition d'une racine multiple.
- Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
- Donner la définition du degré d'un polynôme.
- Une question de cours sur : "Révisions sur les matrices et les systèmes".
 - Exemples :
 - Définition de matrices triangulaires, inversibles, transposées, diagonale, identité, produit de deux matrices, matrices symétriques, antisymétriques.
 - Formule du binôme. Inversibilité des matrices 2×2
- Résolution d'un système linéaire $p \times n$ avec n et $p \leq 5$
- Enoncé le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Une des deux démonstrations du cours sur les polynômes.
- Une des deux démonstrations du cours sur les espaces vectoriels.
- Factorisation des polynômes.
- Présenter l'algorithme de dichotomie.