BCPST 2$_A$

Correction du devoir maison rendu le 10 octobre 2024

Exercice 1 :

1) Pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} n^3 \frac{x^n}{n!} &= \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)}.x^3.\frac{x^{n-3}}{(n-3)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^3}.x^3.\frac{x^{n-3}}{(n-3)!} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{n^3 \frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} x^3 \frac{x^{n-3}}{(n-3)!}}$$

2) Soit x un réel quelconque,

on sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{|x|^n}{n!}$ est convergente *(c'est une série exponentielle)*,

on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{|x|^{n-3}}{(n-3)!}$ converge, puis que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} |x|^3 \frac{|x|^{n-3}}{(n-3)!}$ converge elle aussi.

or $\displaystyle n^3 \frac{|x|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^3 \frac{|x|^{n-3}}{(n-3)!}$ *(d'après 1))* et ces termes généraux sont positifs ou nuls donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^3 \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et enfin (ACV $\Rightarrow$ CV) la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^3 \frac{x^n}{n!}$ est convergente,

Autrement dit :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad S(x) \text{ est bien définie}}$$

Remarque : On peut traiter à part le cas particulier $x = 0$.

3) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$a + b\,X + c\,X(X-1) + d\,X(X-1)(X-2) = a + (b - c + 2d)X + (c - 3d)X^2 + dX^3$$

donc *(en identifiant les coefficients)*

$$X^3 = a + b\,X + c\,X(X-1) + d\,X(X-1)(X-2) \iff \begin{cases} a = 0 \\ b - c + 2d = 0 \\ c - 3d = 0 \\ d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 3 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{X^3 = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2)}$$

4) Pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^3 \frac{x^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \left(k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)\right) \frac{x^k}{k!} \qquad \textit{d'après 3)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\frac{x^k}{k!} \\ &= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + 3x^2\sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + x^3\sum_{k=3}^{n} \frac{x^{k-3}}{(k-3)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xe^x + 3x^2e^x + x^3e^x \qquad \textit{(Limite des sommes partielles de séries exponentielles)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad S(x) = \left(x + 3x^2 + x^3\right) e^x}$$

Exercice 2 :

1) Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$,

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ a + b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
$$\iff P = -\frac{1}{2}X + 1$$

$$\boxed{\text{Il existe un et un seul polynôme } P \in \mathbb{R}_1[X] \text{ tel que } P(0) = 1 \text{ et } P(1) = \frac{1}{2}}$$

2) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = \dfrac{1}{2} \\ P(2) = \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = \dfrac{1}{2} \\ 4a + 2b + c = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + b & = -\dfrac{1}{2} \\ 4a + 2b & = -\dfrac{2}{3} \\ c & = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + b & = -\dfrac{1}{2} \\ -2b & = \dfrac{4}{3} \\ c & = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = -\dfrac{2}{3} \\ c = 1 \end{cases}$$
$$\iff P(X) = \frac{1}{6}X^2 - \frac{2}{3}X + 1$$

$$\boxed{\text{Il existe un et un seul polynôme } P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(0) = 1,\ P(1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(2) = \frac{1}{3}}$$

3) Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, vérifiant $\forall k \in [\![0;n]\!],\quad P(k) = \dfrac{1}{k+1}$

On a alors : $P_1 - P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall k \in [\![0;n]\!],\quad (P_1 - P_2)(k) = 0$,

donc le degré de $P_1 - P_2$ est inférieur ou égal à n et ce polynôme a au moins $(n+1)$ racines distinctes d'où $P_1 - P_2 = 0$ ou encore $P_1 = P_2$

$$\boxed{\text{il existe \underline{au plus} un polynôme } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } P(k) = \frac{1}{k+1} \text{ pour tout entier } k \in [\![0,n]\!]}$$

4) a) on a : $Q(X) = (X+1)P(X) - 1$ donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Q(k) = (k+1)P(k) - 1$ et comme $P(k) = \dfrac{1}{k+1}$ on obtient $Q(k) = 0$

$$\boxed{\text{chaque entier } k \in [\![0,n]\!] \text{ est une racine de } Q(X)}$$

b) Les entiers $k \in [\![0,n]\!]$ sont $n+1$ racines distinctes de $Q(X)$ qui appartient $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc

$$\boxed{\text{il existe une constante } \lambda \in \mathbb{R} \text{ telle que : } Q(X) = \lambda \prod_{k=0}^{n} (X - k)}$$

c) D'une part : $Q(X) = (X+1)P(X) - 1$ donc $Q(-1) = -1$

d'autre part : $Q(X) = \lambda \prod_{k=0}^{n}(X-k)$ donc $Q(-1) = \lambda \prod_{k=0}^{n}(-1-k) = (-1)^{n+1}(n+1)!$ et ainsi :

$$\boxed{\lambda = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}}$$

5) a) On note $R(X) = Q(X) + 1$,

$R(X) = 1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k)$ donc $R(-1) = 1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}(-1)^{n+1}(n+1)! = 1 + (-1)^{2n+1}$

donc $R(-1) = 0$ et ainsi *(caractérisation)* il existe $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R(X) = (X+1)P(X)$

comme de plus $Q(X) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k)$ on a $\deg(R) = n+1$ et ainsi $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$

En conclusion :

$$\boxed{\text{il existe un polynôme } P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } Q(X) + 1 = (X+1)P(X)}$$

b) En prenant le polynôme obtenu à la question précédente on a $(X+1)P(X) = 1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k)$

on a donc $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(k+1)P(k) = 1 + 0$ donc $P(k) = \dfrac{1}{k+1}$

on a donc l'existence du polynôme recherché et la question 3) avait établi l'unicité.

$$\boxed{\text{Il existe un et un seul polynôme } P(X) \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } P(k) = \frac{1}{k+1} \text{ pour tout entier } k \in [\![0,n]\!]}$$

Problème.

1) a) $A(I_n - N) = \sum_{k=0}^{n-1}(N^k - N^{k+1})$, on reconnait une somme télescopique qui donne $A(I_n - N) = N^0 - N^n$.

et comme $N^n = 0$ on a donc $A(I_n - N) = I_n$, on montrerait de même $(I_n - N)A = I_n$

$$\boxed{A \text{ est inversible et que } A^{-1} = I_n - N}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^{-k} &= \left(A^{-1}\right)^k \\ &= (I_n - N)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}N^i \qquad \textit{formule du binôme car } NI_n = I_nN \end{aligned}$$

$$\boxed{A^{-k} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}N^i}$$

Remarque : Comme $N^n = 0$, pour $k \geqslant n-1$, $A^{-k} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{k}{i}N^i$

2) a) $(N+N^2)^0 = I_3$, $(N+N^2)^1 = N + N^2$

et comme $N^3 = 0$, on a : $(N+N^2)^2 = N^2$ et pour tout $k \geqslant 3$, $(N+N^2)^k = 0$

b) I_3 et $N + N^2$ commutent donc on peut appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} A^k &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(N+N^2)^i \\ &= I_3 + k(N+N^2) + \frac{k(k-1)}{2}(N+N^2)^2 \qquad \textit{(car pour } k \geqslant 3,\ (N+N^2)^k = 0 \textit{)} \\ &= I_3 + k(N+N^2) + \frac{k(k-1)}{2}N^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{lorsque } k \in [\![2,+\infty[\![,\ A^k = I_3 + kN + \frac{k(k+1)}{2}N^2}$$

Remarque : cette égalité est encore vraie pour $k=0$ et $k=1$.

c) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad A^k = I_3 + kN + \dfrac{k(k+1)}{2}N^2$ donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

d) En utilisant le résultat de la question 1) b) on peut affirmer que : pour $k \geqslant 2$, $\quad A^{-k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{k}{i}N^i$

donc $\forall k \geqslant 2$, $\quad A^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on peut vérifier que pour $k=1$ c'est encore vrai.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Remarque : Les résultats des deux dernières questions permettent d'affirmer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) a) Lorsque $t \in]-1,1[$, $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ $\quad$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t^n = 0$

(suite géométrique de raison dans $]-1;1[$) ,

il vient $\boxed{S_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-t}}$

b) $S_n'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$, donc

$$\begin{aligned} (1-X)\,.\,S_n'(X) &= \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kX^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k - \sum_{k=1}^{n} kX^k \\ &= X^0 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k \ - \ nX^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} X^k \ - \ (n+1)X^n \end{aligned}$$

$$\boxed{(1-X)\,.\,S_n'(X) = S_n(X) - (n+1)X^n}$$

c) On fixe t dans $]-1,1[$,
on a d'après la question précédente : pour tout n : $\quad (1-t)\,.\,S_n'(t) = S_n(t) - (n+1)t^n$

et comme $\quad S_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-t}$ (Question **3)a)**) $\quad$ et $\quad ((n+1).t^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\quad$ *(croissance comparée)*)

il vient $(1-t)\,.\,S_n'(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-t}$, puis :

$$\boxed{S_n'(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-t)^2}}$$

d) Montrons par récurrence finie sur k que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\quad (1-X)\,.\,S_n^{(k)}(X) \;=\; k\,.\,S_n^{(k-1)}(X) - \dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!}\,X^{n-k+1}$,

- Pour $k = 1$,
  cette propriété a été démontrée à la question **3)b)**.
- Soit $\underline{k \in [\![1, n-1]\!]}$ tel que : $(1-X)\,.\,S_n^{(k)}(X) \;=\; k\,.\,S_n^{(k-1)}(X) \;-\; \dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!}\,X^{n-k+1}$
  en dérivant chaque membre on obtient :
  $$-S_n^{(k)}(X) + (1-X)S_n^{(k+1)}(X) = \; k\,.\,S_n^{(k)}(X) \;-\; \frac{(n+1)!}{(n-k)!}\,X^{n-k}$$
  en ajoutant $S_n^{(k)}(X)$ de chaque coté de cette égalité on obtient :
  $$(1-X)S_n^{(k+1)}(X) = \;(k+1)\,.\,S_n^{(k)}(X) \;-\; \frac{(n+1)!}{(n-k)!}\,X^{n-k} \quad \textit{on reconnait la propriété au rang } k+1$$
  donc, si la propriété est vraie à un rang k, alors elle l'est au rang $k+1$.

En conclusion on obtient bien :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!], \quad (1-X)\,.\,S_n^{(k)}(X) \;=\; k\,.\,S_n^{(k-1)}(X) \;-\; \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!}\,X^{n-k+1}}$$

e) i. $\dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!} = \displaystyle\prod_{i=n-k+2}^{n+1} i$ ou encore $\quad \dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!} = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(n+1-i) \quad$ (*k facteurs équivalents à n*)

donc $\boxed{\dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k}$

ii. La question **3)e)** donne : $\quad (1-t)\,.\,S_n^{(k)}(t) \;=\; k\,.\,S_n^{(k-1)}(t) \;-\; \dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!}\,t^{n-k+1} \; (*)$

On a d'une part : $S_n^{(k-1)}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{(k-1)!}{(1-t)^k}$

et d'autre part la question **e)i.** donne : $\dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!}\,t^{n-k+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{k-1}}n^k t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc en passant à la limite sur l'égalité $(*)$ il vient : $(1-t)S_n^{(k)}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{k!}{(1-t)^k}$, et on obtient bien :

$$\boxed{\left(S_n^{(k)}(t)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}}$$

iii. La propriété $S_n^{(k-1)}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{(k-1)!}{(1-t)^k}$ a été initialisée à la question **3)b)** pour $k = 1$ et nous venons de montrer à la question **3)f)** que si elle est vrai à un rang k alors elle l'est au rang $k+1$,

On peut donc conclure (*raisonnement par récurrence*) que,

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad S_n^{(k-1)}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{(k-1)!}{(1-t)^k}}$$

4) a) La question **2)b)** donne pour $n = 3$ et $k \in [\![2, +\infty[\![$, $A^k = I_3 + kN + \dfrac{k(k+1)}{2}N^2$

de plus, $\quad \displaystyle\sum_{i=0}^{2} \binom{k-1+i}{k-1} N^i = N^0 + \binom{k}{k-1}N^1 + \binom{k+1}{k-1}N^2$

et $\dbinom{k}{k-1} = k$, $\dbinom{k+1}{k-1} = \dfrac{k(k+1)}{2}$ donc

on a bien vérifier la conjecture lorsque $n = 3$ et $k \geq 1$.

b) Lorsque $n \geq 3$ et $k = 1$, $\quad$ on sait que $A^1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} N^i$, $\quad$ de plus pour tout i entre 0 et $n-1$, $\dbinom{0+i}{0} = 1$

donc :

$$\boxed{\text{La conjecture est bien vérifiée lorsque } n \geqslant 3 \text{ et } k = 1.}$$

c) i. Le produit de deux polynômes donne :

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j\right) = \sum_{m=0}^{2n-2}\left(\sum_{i+j=m} a_i b_j\right) X^m$$

En substituant N à X et en sachant que pour $m \geqslant n$, $N^m = 0$ on obtient :

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i N^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j N^j\right) = \sum_{m=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i b_{m-i}\right) N^m$$

en prenant $a_i = \binom{k-1+i}{k-1}$ et $b_j = 1$ on obtient :

$$\boxed{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k-1+i}{k-1} N^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} N^j\right) = \sum_{m=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{m} \binom{k-1+i}{k-1}\right) N^m}$$

ii. *(ici, je choisis de ne pas redémontrer la formule du cours)*
Il suffit d'appliquer la formule : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} + \binom{n+1}{p+1}$

$$\boxed{\text{pour tout } i \in [\![0, n-1]\!], \quad \binom{k-1+i}{k-1} = \binom{k+i}{k} - \binom{k+i-1}{k}}$$

iii. $\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\left(\binom{k+i}{k} - \binom{k+i-1}{k}\right) = \binom{k+m}{k} - \binom{k-1}{k}$ (*télescopage*) or $\binom{k-1}{k} = 0$, donc

$$\boxed{\text{pour } m \in [\![0, n-1]\!], \quad \sum_{i=0}^{m} \binom{k-1+i}{k-1} = \binom{k+m}{k}}$$

iv. On sait que $A^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k-1+i}{k-1} N^i$ et $A = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} N^i$

en utilisant **4)c)i.**, il vient : $A^{k+1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{m} \binom{k-1+i}{k-1}\right] N^m$

et avec le résultat de la question **4)c)iii.**, il vient : $A^{k+1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \binom{k+m}{k} N^m$

propriété au rang $k+1$.

d) On a raisonné par récurrence sur k :
- on a montré l'initialisation dans la question **4)b)**
- puis dans la question **4)c)** on montre que :

si la propriété est vraie à un rang k, alors elle l'est au rang $k+1$.

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k-1+i}{k-1} N^i}$.