La colle commencera par deux questions de cours sur le modèle des questions données au verso.

Ces deux questions peuvent se résumer à l'énoncer d'une définition et/ou d'un théorème.

(Vérifier que la différence entre définition et théorème est bien comprise)

Cette semaine pas de démonstration et pas d'informatique.

Ensuite un calcul de rang ou de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. (sans paramètre)

Puis une équation différentielle homogène simple (voire très simple).

Pour les meilleurs, ce début ne devrait pas dépasser 10 mn

Et enfin si tous ces petits obstacles sont passés : des exercices sur espaces vectoriels et équations différentielles.

- **Révisions : Matrices et systèmes linéaires.**

Opérations sur les matrices. Propriétés. Matrice inversible. Matrice transposée.

Matrices colonnes, lignes, triangulaires.

Résolution de système par la méthode du pivot. Notion d'inconnues principales et d'inconnues secondaires.

Théorème important :

Un système triangulaire admet une et une seule solution si, et seulement si les coefficients diagonaux sont non nuls.

- **Révisions : Equations différentielles linéaires.**

Solution de $y' + a(t)y = 0$. (*interprétation dans le contexte des espaces vectoriels*)

Résolution de $y' + a(t)y = f(t)$.

Principe de superposition. Méthode de variations de la constante.

Solution de $ay'' + by' + cy = 0$. (*interprétation dans le contexte des espaces vectoriels*)

Résolution de $ay'' + by' + cy = f(t)$ avec $a \neq 0$.

Principe de superposition. Conditions initiales.

La forme d'une solution particulière est donnée lorsque f n'est pas une fonction constante.

- **Espaces vectoriels.**

Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.

Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$

Sous-espace vectoriel. Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Propriétés.

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice.

Théorème : Toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Base d'un espace vectoriel. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs

dans une base. (*Nous utilisons les notations $\text{Coord}_B(u)$ pour un vecteur u et $\text{Mat}_B(u_1, \dots, u_n)$ pour une famille.*)

Base canonique de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}_n[X]$.

On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

De toute famille génératrice finie d'un espace E non réduit au vecteur nul on peut extraire une base.

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E . Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$

Dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$:

- Toute famille libre peut se compléter en une base.
- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Une famille libre ayant n éléments est une base.
- Toute famille génératrice a au moins n éléments.
- Une famille génératrice ayant n éléments est une base.

Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

si de plus les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.

Rang d'une famille finie de vecteurs,

il peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

Définition du rang d'une matrice A : dimension de l'espace engendré par les colonnes de A .

$\text{rg}(M) = \text{rg}(M^T)$, donc c'est aussi la dimension de l'espace engendré par les lignes de A .

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M inversible si, et seulement si, $\text{rg}(M) = n$.

Dans un espace vectoriel E de base $\mathcal{B}$,

une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est une base si, et seulement si sa matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Exemples de questions de cours :

- Une question de cours sur : "Révisions sur les matrices et les systèmes".

Exemples :

Définition de matrices triangulaires, inversibles, transposées, diagonale, identité, produit de deux matrices, matrices symétriques, antisymétriques.

Formule du binôme. Inversibilité des matrices 2×2

Théorème fondamental sur les systèmes triangulaires.

- Une question de cours sur : "Equations différentielles".

Exemples :

Énoncer d'un théorème donnant les solutions de l'équation homogène.

Énoncer d'un théorème : "condition initiale".

Énoncer le principe de superposition...

- Une question de cours sur : "Espaces vectoriels".

Exemples :

Définition de la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Définition de la matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition d'une famille libre, génératrice, d'une base.

- Montrer qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E est une base de E .
- Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel de référence est un sous-espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille finie de vecteurs est libre. (Familles de fonctions, de polynômes, de matrices).
- Résolution d'un système linéaire $p \times n$ avec n et $p \leq 5$