1

Equations différentielles homogènes.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ *(non trivial)*, on note $D^k(I)$ l'espace vectoriel des fonctions k fois dérivables sur I.

• **Equations différentielles linéaire homogènes d'ordre 1 sous forme résolue.**

Soit a une fonction continue sur I, on note (E_0) l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$.

Définition :

l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ f \in D^1(I) \mid \forall t \in I,\ f'(t) + a(t)f(t) = 0 \right\}$$

Proposition.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E_0) est sous espace vectoriel de $D_1(I)$.

Démonstration :

Théorème.

On note A une primitive quelconque de a sur I,
l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-A(t)} \end{array} \;\middle|\; k \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration :
Soit f une fonction dérivable sur I, on note $g : t \longmapsto e^{A(t)} f(t)$,

$$\begin{array}{rll} f \in S_{(E_0)} & \iff & \forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)f(t) = 0 \\ & \iff & \forall t \in I, \quad e^{A(t)} f'(t) + a(t)e^{A(t)} f(t) = 0 \qquad \text{car} \quad e^{A(t)} \neq 0 \\ & \iff & \forall t \in I, \quad g'(t) = 0 \\ & \iff & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad g(t) = k \qquad \text{car} \quad I \text{ est un intervalle} \\ & \iff & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad e^{A(t)} f(t) = k \\ & \iff & \exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad f(t) = ke^{-A(t)} \qquad \text{car} \quad e^{-A(t)} \neq 0 \end{array}$$

■

Proposition : $S_{(E_0)} = \text{Vect } (t \longmapsto e^{-A(t)}), \quad \dim(S_{(E_0)}) = 1 \quad \text{et} \quad S_{(E_0)} \subset C^1(I)$

Remarques :

- Si f est une solution non nulle de (E_0) alors $S_{(E_0)} = \text{Vect}< f >$
- Les solutions non nulles de (E_0) ne s'annulent pas sur I.
- Si une solution de (E_0) s'annule alors c'est la fonction nulle.

• Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$, on note (E_0) l'équation différentielle :

$$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

Définition :

l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \Big\{ f \in D^2(I) \mid \forall t \in I,\ af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0 \Big\}$$

Proposition.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E_0) est sous espace vectoriel de $D_2(I)$.

Théorème

On distingue trois cas :

❶ si $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{cases} I & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \quad k_1\, e^{r_1 t} + k_2\, e^{r_2 t} \end{cases} \;\middle|\; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \mathrm{Vect}(t \longmapsto e^{r_1 t}\ ,\ t \longmapsto e^{r_2 t})$$

❷ si $ax^2 + bx + c = 0$ a une racine réelle double r_0,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{cases} I & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \quad k_1\, e^{r_0 t} + k_2\, t\, e^{r_0 t} \end{cases} \;\middle|\; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \mathrm{Vect}(t \longmapsto e^{r_0 t}\ ,\ t \longmapsto te^{r_0 t})$$

❸ si $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\omega$ et $\overline{\alpha + i\omega}$,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{cases} I & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \quad k_1\ \cos(\omega t)\, e^{\alpha t}\ +\ k_2\ \sin(\omega t)\, e^{\alpha t} \end{cases} \;\middle|\; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \mathrm{Vect}(t \longmapsto \cos(\omega t)\, e^{\alpha t}\ ,\ t \longmapsto \sin(\omega t)\, e^{\alpha t})$$

Proposition :

Dans tous les cas : $\dim(S_{(E_0)}) = 2$ et $S_{(E_0)} \subset C^\infty(I)$

Remarques.

- On pourra sauf indication contraire utiliser les résultats suivants :
  - Si $r_1 \neq r_2$ alors $(t \longmapsto e^{r_1 t}\ ,\ t \longmapsto e^{r_2 t})$ est une famille libre.
  - pour tout réel r_0, $(t \longmapsto e^{r_0 t}\ ,\ t \longmapsto te^{r_0 t})$ est une famille libre.
  - Si $\omega \neq 0$ alors $(t \longmapsto \cos(\omega t)\, e^{\alpha t}\ ,\ t \longmapsto \sin(\omega t)\, e^{\alpha t})$ est une famille libre.

- Dans le cas ❸ on peut aussi écrire les solutions sous la forme : $t \longmapsto Ae^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$

2

Equation avec second membre.

Soit φ une fonction définie sur un intervalle I.

2.1 Première ordre.

Soit a une fonction continue sur I, on note :

$$(E)\ :\ y' + a(t)y = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad (E_0) : y' + a(t)y = 0$$

Définition :

l'ensemble des solutions de (E) sur I est :

$$S_{(E)} = \Big\{ f \in D^1(I) \mid \forall t \in I,\ f'(t) + a(t)f(t) = \varphi(t) \Big\}$$

Théorème :

Si g est une solution (*particulière*) de (E) sur I alors

l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I est : $S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) + g(t) \end{array} \ \middle|\ h \in S_{(E_0)} \right\}$

ou plus simplement : $S_{(E)} = \big\{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \big\}$

Démonstration :

On suppose que g est une solution de (E), (On sait que : $\forall t \in I,\quad g'(t) + a(t)g(t) = \varphi(t)$)

Soit f une fonction dérivable sur I,

$$\begin{array}{rcl} f \in S_{(E)} & \iff & \forall t \in I,\quad f'(t) + a(t)f(t) = \varphi(t) \\ & \iff & \forall t \in I,\quad f'(t) + a(t)f(t) = g'(t) + a(t)g(t) \\ & \iff & \forall t \in I,\quad (f-g)'(t) + a(t)(f-g)(t) = 0 \\ & \iff & f - g \in S_{E_0} \\ & \iff & \exists h \in S_{E_0} :\quad f - g = h \\ & \iff & \exists h \in S_{E_0} :\quad f = h + g \end{array}$$

$$S_{(E)} = \big\{ f \in D^1(I) \mid \exists h \in S_{(E_0)} :\ f = g + h \big\} \quad \text{ou encore} \quad S_{(E)} = \big\{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \big\}$$

■

Remarque :

Si A est une primitive de a sur I et g est une solution de (E) alors

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-A(t)} + g(t) \end{array} \ \middle|\ k \in \mathbb{R} \right\}$$

2.2 Deuxième ordre à coefficients constants.

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$, on note :

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t) \quad \text{et} \quad (E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

Définition :

l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \forall t \in I,\ af''(t) + bf'(t) + cf(t) = \varphi(t) \right\}$$

Théorème :

Si g est une solution (*particulière*) de (E) sur I alors

l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I est : $S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{lcc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) + g(t) \end{array} \middle| \quad h \in S_{(E_0)} \right\}$

ou plus simplement : $S_{(E)} = \left\{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \right\}$

Démonstration :

On suppose que g est une solution de (E), (On sait que : $\forall t \in I, \quad ag''(t) + b(t)g'(t) + cg(t) = \varphi(t)$).

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I,

$$\begin{array}{rcl} f \in S_{(E)} & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad af''(t) + b(t)f'(t) + cf(t) = \varphi(t) \\ & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad af''(t) + b(t)f'(t) + cf(t) = ag''(t) + b(t)g'(t) + cg(t) \\ & \Longleftrightarrow & \forall t \in I, \quad a(f-g)''(t) + b(f-g)'(t) + c(f-g)(t) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & f - g \in S_{E_0} \\ & \Longleftrightarrow & \exists h \in S_{E_0} : \quad f = h + g \end{array}$$

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \exists h \in S_{(E_0)} : \ f = g + h \right\} \quad \text{ou encore} \quad S_{(E)} = \left\{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \right\}$$

■

3

Principe de superposition.

3.1 Première ordre.

Proposition :

Soient a, φ_1, φ_2 trois fonctions continues sur I et deux réels α et β,
on considère trois équations différentielles :

$$(E_1) : y' + a(t)y = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : y' + a(t)y = \varphi_2(t) \qquad (E) : y' + a(t)y = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$$

Si g_1 est une solution de (E_1), g_2 est une solution de (E_2) alors $\alpha g_1 + \beta g_2$ est une solution de (E).

Démonstration :

On suppose que : $\forall t \in I, \quad g_1'(t) + a(t)g_1(t) = \varphi_1(t)$ et $\forall t \in I, \quad g_2'(t) + a(t)g_2(t) = \varphi_2(t)$
On a alors pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in I$,

$$\begin{aligned}(\alpha g_1 + \beta g_2)'(t) + a(t)(\alpha g_1 + \beta g_2)(t) &= \alpha(g_1'(t) + a(t)g_1(t)) + \beta(g_2'(t) + a(t)g_2(t)) \\ &= \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)\end{aligned}$$

donc $\alpha g_1 + \beta g_2$ est solution de (E)

■

Ce principe permet de simplifier une équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ en commençant par chercher une solution particulière des équations différentielles :

$$(E_1) : y' + a(t)y = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : y' + a(t)y = \varphi_2(t)$$

3.2 Deuxième ordre.

Proposition :

Soient φ_1, φ_2 des fonctions définies sur l'intervalle I et α, β des réels,
On considère les équations différentielles : $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$,

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = \varphi_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) : ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$$

Si g_1 est une solution de (E_1) sur I et g_2 est une solution de (E_2) sur I
alors $\alpha\, g_1 + \beta\, g_2$ est une solution de (E) sur I

Démonstration :

Cette proposition permet de simplifier une équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ en commençant par chercher une solution particulière des équations différentielles :

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = \varphi_1(t) \qquad (E_2) : ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$$

4

Méthode de variation de la constante.

On ici s'intéresse aux équations différentielles de la forme : $(E): \ y' + a(t)\,y = \varphi(t)$.
avec a et φ deux **fonctions continues** sur l'intervalle I.

Ces équations sont appelées **équations différentielles linéaires résolues** du premier ordre.

Théorème : $\boxed{(E) \text{ possède au moins une solution sur } I}$

Démonstration : ***(Méthode de la variation de la constante)***

En trois étapes :

❶ On commence par résoudre (E_0), a est continue sur I, on note A une de ses primitives sur I :

$$S_0 = \left\{ \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k\exp\left(-A(t)\right) \end{cases} \;\middle|\; k \in \mathbb{R} \right\}$$

dans la suite, on pose $f_0(t) = \exp\left(-A(t)\right)$ et ainsi : $S_0 = \mathrm{Vect}(f_0)$

❷ **On cherche une solution de** (E) *(on cherche une solution particulière)*
Soit k une fonction dérivable sur I, on note : $g : t \mapsto k(t) \times f_0(t)$

$$\begin{aligned}
g \in S_E \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad g'(t) + a(t)g(t) = \varphi(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad k'(t)\,f_0(t) + k(t)\,f_0'(t) + a(t)\,k(t)\,f_0(t) = \varphi(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad k'(t)f_0(t) + k(t)\underbrace{\left(f_0'(t) + a(t)f_0(t)\right)}_{=0} = \varphi(t) \qquad \text{car } f_0 \in S_{E_0} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad k'(t)f_0(t) = \varphi(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad k'(t) = \varphi(t)\exp\left(A(t)\right)
\end{aligned}$$

donc en choisissant pour k une des primitives de $t \longmapsto \varphi(t)\exp(A(t))$
(*cette primitive existe car cette fonction est continue sur I*),
on obtient bien $g : t \mapsto k(t) \times \exp(-A(t))$ est une solution de (E). ■

❸ Connaissant les solutions de (E_0) et une solution de (E) on peut conclure.

Exemples : *Ex 6 de la feuille_Act_13*

Quand utilise-t-on cette méthode :

① Sur une équation différentielle du premier ordre $y' + a(t)\,y = \varphi(t)$.

② Quand l'énoncé ne donne pas la forme d'une solution particulière.

③ Quand on ne trouve pas de solution en faisant : une conjecture sur la forme d'une solution suivie d'une vérification par calcul.

Remarques :
- pour ③ certains utilisent la phrase [1] : "Chercher une solution sous la forme du second membre"
- pour ceux qui veulent aller plus loin ils peuvent étudier le chapitre 6 de ce cours.

1. cette phrase sert à guider la recherche en proposant une conjecture, sans constituer une méthode rigoureuse ni une preuve

5 Condition initiale.

5.1 Premier ordre.

Soient I un intervalle, $a : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I,
on note (E) l'équation différentielle : $y' + a(t)y = \varphi(t)$

Théorème :

Quel que soient t_0, y_0 deux nombres réels avec $t_0 \in I$, il existe une et une seule solution f de (E) sur I vérifiant :

$$f(t_0) = y_0$$

Démonstration :

Soit f une solution de (E) et $k \in \mathbb{R}$ tel que $f : t \longmapsto k\, e^{-A(t)} + g(t)$,

$$\begin{aligned} f(t_0) = y_0 \quad &\iff \quad k\, e^{-A(t_0)} + g(t_0) = y_0 \\ &\iff \quad k\, e^{-A(t_0)} = y_0 - g(t_0) \\ &\iff \quad k = (y_0 - g(t_0))e^{A(t_0)} \\ &\iff \quad f : t \longmapsto (y_0 - g(t_0))\, e^{-(A(t)-A(t_0))} + g(t) \end{aligned}$$

■

5.2 Deuxième ordre.

Soient a, b et c trois **réels** tels que $a \neq 0$, on note $(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$

On suppose ici que (E) possède au moins une solution sur I.

Théorème :

Soit t_0, y_0 et y_1 trois nombres réels avec $t_0 \in I$, il existe une et une seule solution f de (E) vérifiant :

$$f(t_0) = y_0 \ , \quad f'(t_0) = y_1$$

Démonstration :

6

Recherche d'une solution particulière (Complément).

Ici on s'intéresse aux équations différentielles à **coefficients constants**.
Ces propriétés illustrent la phrase déjà citée dans ce cours *(paragraphe 4)*[1] :

"Chercher une solution sous la forme du second membre"

6.1 Second membre de la forme. $t \longmapsto \cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$

Première ordre. (a *est un réel*) $\quad (E) : y' + ay = \varphi(t)$

Si φ est de la forme $t \longmapsto \cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto \sin(\omega t)$ (ω un réel non nul).
on cherche une solution de (E) sous la forme $\quad t \longmapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$
où λ et μ sont deux réels à déterminer.

Exemples : $\quad y' + 2y = \cos(2t) \qquad y'(t) - 4y(t) = \sin(4t)$

Deuxième ordre.(a, b, c *sont des réels*)

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$$

Si φ est de la forme $t \longmapsto \cos(\omega t)$ ou $t \longmapsto \sin(\omega t)$ (ω un réel non nul).
on commence par chercher une solution du type $\quad t \longmapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$
et si on ne trouve pas on cherche sous la forme $\quad t \longmapsto \lambda\, t\, \cos(\omega t) + \mu\, t\, \sin(\omega t)$
où λ et μ sont deux réels à déterminer.

Exemples : $\quad y'' + y' + y = \sin(3t) \qquad y''(t) - 3y'(t) + y(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

6.2 Second membre de la forme. $t \longmapsto P(t)e^{mt}$

Première ordre. (a *est un réel*)

$$(E) : y' + ay = \varphi(t)$$

Si φ est de la forme $t \longmapsto P(t)e^{mt}$ (m étant un réel et P un polynôme).
on cherche une solution de (E) sous la forme $\quad t \longmapsto Q(t)e^{mt}$, où Q un polynôme à déterminer.

Exemples : $\quad y' + 2y = e^{3t} \qquad y'(t) - 4y(t) = t^3e^{-t}$

Deuxième ordre.(a, b, c *sont des réels*)

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$$

Si φ est de la forme $t \longmapsto P(t)e^{mt}$ (m étant un réel et P un polynôme).

on cherche une solution sous la forme $\quad t \longmapsto Q(t)e^{mt}$, où Q un polynôme à déterminer.

Exemples : $\quad y'' + y' + y = e^{-4t} \qquad y''(t) - 3y'(t) + y(t) = te^{2t}$

1. On notera qu'on ne devrait l'utiliser que lorsque les coefficients sont constants, mais pour les équations d'ordre 1 ou 2