

Equations différentielles homogènes.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} (*non trivial*), on note $D^k(I)$ l'espace vectoriel des fonctions k fois dérivables sur I .

• Equations différentielles linéaire homogènes d'ordre 1 sous forme résolue.

Soit a une fonction continue sur I , on note (E_0) l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$.

Définition :

l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ f \in D^1(I) \mid \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = 0 \right\}$$

Proposition.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E_0) est sous espace vectoriel de $D_1(I)$.

Démonstration :

Théorème.

On note A une primitive quelconque de a sur I ,
l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-A(t)} \end{array} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration :

Soit f une fonction dérivable sur I , on note $g : t \longmapsto e^{A(t)}f(t)$,

$$\begin{aligned} f \in S_{(E_0)} &\iff \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, e^{A(t)}f'(t) + a(t)e^{A(t)}f(t) = 0 && \text{car } e^{A(t)} \neq 0 \\ &\iff \forall t \in I, g'(t) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in I, g(t) = k && \text{car } I \text{ est un intervalle} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in I, e^{A(t)}f(t) = k \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in I, f(t) = ke^{-A(t)} && \text{car } e^{-A(t)} \neq 0 \end{aligned}$$

■

Proposition :

$$S_{(E_0)} = \text{Vect}(t \longmapsto e^{-A(t)}), \quad \dim(S_{(E_0)}) = 1 \quad \text{et} \quad S_{(E_0)} \subset C^1(I)$$

Remarques :

- Si f est une solution non nulle de (E_0) alors $S_{(E_0)} = \text{Vect}\langle f \rangle$
- Les solutions non nulles de (E_0) ne s'annulent pas sur I .
- Si une solution de (E_0) s'annule alors c'est la fonction nulle.

• Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$, on note (E_0) l'équation différentielle :

$$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

Définition :

L'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0 \right\}$$

Proposition.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E_0) est sous espace vectoriel de $D_2(I)$.

Théorème

On distingue trois cas :

- ❶ si $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \end{array} \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \text{Vect}(t \longmapsto e^{r_1 t}, t \longmapsto e^{r_2 t})$$

- ❷ si $ax^2 + bx + c = 0$ a une racine réelle double r_0 ,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 e^{r_0 t} + k_2 t e^{r_0 t} \end{array} \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \text{Vect}(t \longmapsto e^{r_0 t}, t \longmapsto t e^{r_0 t})$$

- ❸ si $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\omega$ et $\overline{\alpha + i\omega}$,
alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 \cos(\omega t) e^{\alpha t} + k_2 \sin(\omega t) e^{\alpha t} \end{array} \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$S_{(E_0)} = \text{Vect}(t \longmapsto \cos(\omega t) e^{\alpha t}, t \longmapsto \sin(\omega t) e^{\alpha t})$$

Proposition :

$$\text{Dans tous les cas : } \dim(S_{(E_0)}) = 2 \quad \text{et} \quad S_{(E_0)} \subset C^\infty(I)$$

Remarques.

- On pourra sauf indication contraire utiliser les résultats suivants :

- Si $r_1 \neq r_2$ alors $(t \longmapsto e^{r_1 t}, t \longmapsto e^{r_2 t})$ est une famille libre.
- pour tout réel r_0 , $(t \longmapsto e^{r_0 t}, t \longmapsto t e^{r_0 t})$ est une famille libre.
- Si $\omega \neq 0$ alors $(t \longmapsto \cos(\omega t) e^{\alpha t}, t \longmapsto \sin(\omega t) e^{\alpha t})$ est une famille libre.

- Dans le cas ❸ on peut aussi écrire les solutions sous la forme : $t \longmapsto A e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$

Equation avec second membre.

Soit φ une fonction définie sur un intervalle I .

2.1 Première ordre.

Soit a une fonction continue sur I , on note :

$$(E) : y' + a(t)y = \varphi(t) \quad \text{et} \quad (E_0) : y' + a(t)y = 0$$

Définition :

l'ensemble des solutions de (E) sur I est :

$$S_{(E)} = \left\{ f \in D^1(I) \mid \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = \varphi(t) \right\}$$

Théorème :

Si g est une solution (*particulière*) de (E) sur I alors

$$\left. \begin{array}{l} \text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ sur } I \text{ est : } S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto h(t) + g(t) \end{array} \mid h \in S_{(E_0)} \right\} \\ \text{ou plus simplement : } S_{(E)} = \{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \} \end{array} \right\}$$

Démonstration :

On suppose que g est une solution de (E) , (On sait que : $\forall t \in I, g'(t) + a(t)g(t) = \varphi(t)$)

Soit f une fonction dérivable sur I ,

$$\begin{aligned} f \in S_{(E)} &\iff \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = g'(t) + a(t)g(t) \\ &\iff \forall t \in I, (f - g)'(t) + a(t)(f - g)(t) = 0 \\ &\iff f - g \in S_{(E_0)} \\ &\iff \exists h \in S_{(E_0)} : f - g = h \\ &\iff \exists h \in S_{(E_0)} : f = h + g \end{aligned}$$

$$S_{(E)} = \{ f \in D^1(I) \mid \exists h \in S_{(E_0)} : f = g + h \} \quad \text{ou encore} \quad S_{(E)} = \{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \}$$

■

Remarque :

Si A est une primitive de a sur I et g est une solution de (E) alors

$$S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto ke^{-A(t)} + g(t) \end{array} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

2.2 Deuxième ordre à coefficients constants.

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$, on note :

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t) \quad \text{et} \quad (E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

Définition :

l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_{(E_0)} = \left\{ f \in D^2(I) \mid \forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = \varphi(t) \right\}$$

Théorème :

Si g est une solution (*particulière*) de (E) sur I alors

$$\text{l'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ sur } I \text{ est : } S_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto h(t) + g(t) \end{array} \mid h \in S_{(E_0)} \right\}$$

$$\text{ou plus simplement : } S_{(E)} = \{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \}$$

Démonstration :

On suppose que g est une solution de (E) , (On sait que : $\forall t \in I, ag''(t) + b(t)g'(t) + cg(t) = \varphi(t)$).

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I ,

$$\begin{aligned} f \in S_{(E)} &\iff \forall t \in I, af''(t) + b(t)f'(t) + cf(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, af''(t) + b(t)f'(t) + cf(t) = ag''(t) + b(t)g'(t) + cg(t) \\ &\iff \forall t \in I, a(f-g)''(t) + b(f-g)'(t) + c(f-g)(t) = 0 \\ &\iff f - g \in S_{(E_0)} \\ &\iff \exists h \in S_{(E_0)} : f = h + g \end{aligned}$$

$$S_{(E)} = \{ f \in D^2(I) \mid \exists h \in S_{(E_0)} : f = g + h \} \quad \text{ou encore} \quad S_{(E)} = \{ h + g \mid h \in S_{(E_0)} \}$$

■

Principe de superposition.

3.1 Première ordre.

Proposition :

Soient a, φ_1, φ_2 trois fonctions continues sur I et deux réels α et β ,
on considère trois équations différentielles :

$$(E_1) : y' + a(t)y = \varphi_1(t) \quad (E_2) : y' + a(t)y = \varphi_2(t) \quad (E) : y' + a(t)y = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$$

Si g_1 est une solution de (E_1) , g_2 est une solution de (E_2) alors $\alpha g_1 + \beta g_2$ est une solution de (E) .

Démonstration :

On suppose que : $\forall t \in I, g_1'(t) + a(t)g_1(t) = \varphi_1(t)$ et $\forall t \in I, g_2'(t) + a(t)g_2(t) = \varphi_2(t)$

On a alors pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in I$,

$$\begin{aligned} (\alpha g_1 + \beta g_2)'(t) + a(t)(\alpha g_1 + \beta g_2)(t) &= \alpha(g_1'(t) + a(t)g_1(t)) + \beta(g_2'(t) + a(t)g_2(t)) \\ &= \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t) \end{aligned}$$

donc $\alpha g_1 + \beta g_2$ est solution de (E) ■

Ce principe permet de simplifier une équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ en commençant par chercher une solution particulière des équations différentielles :

$$(E_1) : y' + a(t)y = \varphi_1(t) \quad (E_2) : y' + a(t)y = \varphi_2(t)$$

3.2 Deuxième ordre.

Proposition :

Soient φ_1, φ_2 des fonctions définies sur l'intervalle I et α, β des réels,

On considère les équations différentielles : $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$,

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = \varphi_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) : ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$$

Si g_1 est une solution de (E_1) sur I et g_2 est une solution de (E_2) sur I

alors $\alpha g_1 + \beta g_2$ est une solution de (E) sur I

Démonstration :

Cette proposition permet de simplifier une équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ en commençant par chercher une solution particulière des équations différentielles :

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = \varphi_1(t) \quad (E_2) : ay'' + by' + cy = \varphi_2(t)$$

Méthode de variation de la constante.

Cette méthode ne concerne (*dans notre programme*) que les équations différentielles du premier ordre.

On ici s'intéresse aux équations différentielles de la forme :

$$(E) : y' + a(t)y = \varphi(t)$$

avec a et φ deux **fonctions continues** sur l'intervalle I .

Ces équations sont appelées **équations différentielles linéaires résolues** du premier ordre.

Théorème :

(E) possède au moins une solution sur I .

Démonstration : (*Méthode de la variation de la constante*)

En trois étapes :

❶ On commence par résoudre (E_0), a est continue sur I , on note A une de ses primitives sur I :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k \exp(-A(t)) \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$$

dans la suite, on pose $f_0(t) = \exp(-A(t))$ et ainsi $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k f_0(t) \end{array} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}$ ou encore : $S_0 = \text{Vect}(f_0)$

❷ On cherche une solution de (E)

Soit k une fonction dérivable sur I , on note : $g : t \mapsto k(t) \times f_0(t)$

$$\begin{aligned} g \in S_E &\iff \forall t \in I, \quad g'(t) + a(t)g(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad k'(t)f_0(t) + k(t)f_0'(t) + a(t)k(t)f_0(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad k'(t)f_0(t) + k(t) \underbrace{(f_0'(t) + a(t)f_0(t))}_{=0} = \varphi(t) \quad \text{car } f_0 \in S_{E_0} \\ &\iff \forall t \in I, \quad k'(t)f_0(t) = \varphi(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad k'(t) = \varphi(t) \exp(A(t)) \end{aligned}$$

donc en choisissant pour k une des primitives de $t \mapsto \varphi(t) \exp(A(t))$
(cette primitive existe car cette fonction est continue sur I),

on obtient bien $g : t \mapsto k(t) \times \exp(-A(t))$ est une solution de (E). ■

❸ Connaissant les solutions de (E_0) et une solution de (E) on peut conclure.

Exemples : Ex 6 de la feuille_Act.13

Condition initiale.

5.1 Premier ordre.

Soient I un intervalle, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I ,
on note (E) l'équation différentielle : $y' + a(t)y = \varphi(t)$

Théorème :

Quel que soient t_0, y_0 deux nombres réels avec $t_0 \in I$, il existe une et une seule solution f de (E) sur I vérifiant :

$$f(t_0) = y_0$$

Démonstration :

Soit f une solution de (E) et $k \in \mathbb{R}$ tel que $f : t \mapsto k e^{-A(t)} + g(t)$,

$$\begin{aligned} f(t_0) = y_0 &\iff k e^{-A(t_0)} + g(t_0) = y_0 \\ &\iff k e^{-A(t_0)} = y_0 - g(t_0) \\ &\iff k = (y_0 - g(t_0)) e^{A(t_0)} \\ &\iff f : t \mapsto (y_0 - g(t_0)) e^{-(A(t) - A(t_0))} + g(t) \end{aligned}$$

■

5.2 Deuxième ordre.

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$, on note $(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$

On suppose ici que (E) possède au moins une solution sur I .

Théorème :

Soit t_0, y_0 et y_1 trois nombres réels avec $t_0 \in I$, il existe une et une seule solution f de (E) vérifiant :

$$f(t_0) = y_0, \quad f'(t_0) = y_1$$

Démonstration :

Recherche d'une solution particulière (Complément).

Ici on s'intéresse aux équations différentielles à **coefficients constants**.

On commence par simplifier le problème en utilisant le principe de superposition pour simplifier le second membre.

6.1 Second membre de la forme. $t \mapsto \cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$

Première ordre. (a est un réel) $(E) : y' + ay = \varphi(t)$

Si φ est de la forme $t \mapsto \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \sin(\omega t)$ (ω un réel non nul).

on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$
où λ et μ sont deux réels à déterminer.

Exemples : $y' + 2y = \cos(2t)$ $y'(t) - 4y(t) = \sin(4t)$

Deuxième ordre. (a, b, c sont des réels)

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$$

Si φ est de la forme $t \mapsto \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \sin(\omega t)$ (ω un réel non nul).

on commence par chercher une solution du type $t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$

et si on ne trouve pas on cherche sous la forme $t \mapsto \lambda t \cos(\omega t) + \mu t \sin(\omega t)$
où λ et μ sont deux réels à déterminer.

Exemples : $y'' + y' + y = \sin(3t)$ $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

6.2 Second membre de la forme. $t \mapsto P(t)e^{mt}$

Première ordre. (a est un réel)

$$(E) : y' + ay = \varphi(t)$$

Si φ est de la forme $t \mapsto P(t)e^{mt}$ (m étant un réel et P un polynôme).

on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto Q(t)e^{mt}$, où Q un polynôme à déterminer.

Exemples : $y' + 2y = e^{3t}$ $y'(t) - 4y(t) = t^3 e^{-t}$

Deuxième ordre. (a, b, c sont des réels)

$$(E) : ay'' + by' + cy = \varphi(t)$$

Si φ est de la forme $t \mapsto P(t)e^{mt}$ (m étant un réel et P un polynôme).

on cherche une solution sous la forme $t \mapsto Q(t)e^{mt}$, où Q un polynôme à déterminer.

Exemples : $y'' + y' + y = e^{-4t}$ $y''(t) - 3y'(t) + y(t) = te^{2t}$