BCPST $\boldsymbol{2_A}$

DEVOIR SURVEILLE

MATHÉMATIQUES

Samedi 19 octobre 2024

(3 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Sauf mention contraire, toutes les réponses fournies doivent être justifiées.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les conclusions.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Exercice 1 : À la découverte des polynômes de Tchebychev de première espèce

On étudie dans cet exercice la suite de polynômes $(T_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{\mathrm{n+2}}(X) = 2X\, T_{\mathrm{n+1}}(X) - T_{\mathrm{n}}(X)$$

1) Les premiers polynômes.

Calculer T_2, T_3 et T_4.

2) Des questions d'informatique.

a) Écrire une fonction `polyT(n, x)` qui prend en entrée un entier n, un nombre x et renvoie le nombre $T_n(x)$.
(Il s'agit ici de calculer le terme d'indice n de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2x\, u_{n+1} - u_n$)

Pour les deux questions suivantes on représente les polynômes par la liste de ses coefficients.

- $-5 + 2X + 3X^2$ est représenté par `[-5, 2, 3]` mais aussi par `[-5, 2, 3, 0, 0]` ou ...
- Le polynôme nul est représenté par `[0]` mais aussi par `[]` ou `[0, 0]` ...

La donnée de cette liste définie entièrement le polynôme associé.

b) Donner sans justification des listes représentant les polynômes T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4.

c) Ecrire une fonction Python `suivant(P_0, P_1)` qui prend pour arguments deux polynômes P_0 et P_1 et qui renvoie le polynôme $2XP_1(X) - P_0(X)$

d) En déduire une fonction `polynome_T(n)` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la liste des coefficients du polynôme T_n.
(Vous pouvez tout à fait répondre à cette question en utilisant la fonction `suivant` *même si vous n'avez pas répondu à la question c))*

3) Quelques propriétés des polynômes $\boldsymbol{T_n}$.

a) À l'aide d'une récurrence double, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- T_{n} est un polynôme à coefficients entiers ;
- T_{n} est de degré n ;
- $T_{\mathrm{n}}(-X) = (-1)^{\mathrm{n}} T_{\mathrm{n}}(X)$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on note a_{n} le coefficient dominant de T_{n}.
Montrer que $(a_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et en déduire l'expression de a_{n} pour tout $n \geqslant 1$.

c) Déterminer $T_{\mathrm{n}}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *On pourra distinguer le cas où n est pair du cas où n est impair.*

4) Factorisation de $\boldsymbol{T_n}$.

a) Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$.

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{\mathrm{n}}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
*Indication : On pourra faire une récurrence double et utiliser le résultat de la question **4)a)**.*

c) Retrouver ainsi $T_{\mathrm{n}}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En utilisant le **4)b)**, trouver n racines distinctes de T_{n}.

e) En déduire la factorisation de T_{n} dans $\mathbb{C}[X]$ pour tout $n \geqslant 1$.
Si vous n'avez pas trouvé les racines de T_n dans la question précédente, vous avez tout à fait le droit de simplement les appeler $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ dans cette question !

5) Unicité de T_n.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme S_{n} tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = S_{\mathrm{n}}(\cos(\theta))$$

On pose alors $R_{\mathrm{n}} = T_{\mathrm{n}} - S_{\mathrm{n}}$.

a) Calculer $R_{\mathrm{n}}(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que $S_{\mathrm{n}} = T_{\mathrm{n}}$.

6) Une équation différentielle vérifiée par T_n
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = T_n(\cos(\theta))$.

a) Vérifier en utilisant la question **4)a)** que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f''(\theta) + n^2 f(\theta) = 0$.

b) En déduire que : $\left(1 - X^2\right) T_n''(X) - X T_n'(X) + n^2 T_n(X) = 0$.

7) Une famille de polynômes orthogonaux.

a) Calculer suivant les valeurs de n et p l'intégrale :

$$I_{n,p} = \int_0^\pi \cos(nt)\cos(pt)\,\mathrm{d}t$$

On distinguera les cas ; ① $n \neq p$, ② $n = p \neq 0$ et ③ $n = p = 0$ et on pensera à utiliser 4)a).

b) *(Uniquement pour les 5/2)*
En déduire que pour $n \neq p$,

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_p(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0$$

On utilisera le théorème rappelé en annexe en fin de sujet.

Exercice 2 : Manipulation de matrices en Python

On souhaite implémenter un certain nombre de fonctions capables de détecter la forme d'une matrice donnée.
Vous trouverez en fin d'exercice des rappels sur quelques commandes Python utiles.

1) On souhaite écrire une fonction `testTriangSup(A)` qui prend en entrée une matrice carrée A, et renvoie `True` si A est triangulaire supérieure (et `False` sinon). On propose à cette fin les quatre fonctions suivantes. Pour chacune d'entre elles, déterminer si elle fonctionne et si elle accomplit bien l'objectif recherché (dans le cas contraire, expliquer le problème).

```
def testTriangSup1(A):
    n = A.shape[0]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i>j and A[i, j] == 0:
                return True
    return False
```

```
def testTriangSup2(A):
    n = A.shape[0]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i<=j and A[i, j] == 0:
                return False
    return True
```

```
def testTriangSup3(A):
    n = A.shape[0]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i>j and A[i, j] != 0:
                return False
    return True
```

```
def testTriangSup4(A):
    n = A.shape[0]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i<j and A[i, j] != 0:
                return False
    return True
```

2) Écrire une fonction `testSym(A)` qui prend en entrée une matrice A, et renvoie `True` si A est carrée et symétrique (et `False` sinon).

3) Que fait la fonction suivante ? *On justifiera brièvement la réponse.*

```
def testMystere(A):
    nbLignes = A.shape[0]
    nbCols = A.shape[1]
    for j in range(nbCols):
        compteur = 0
        for i in range(nbLignes):
            if A[i, j] != 0:
                compteur += 1
        if compteur != 1: return False
    return True
```

4) Écrire une fonction `prodMat(A,X)` qui prend en argument une matrice carrée A et une matrice colonne X de taille compatible, et qui renvoie AX. On supposera que les matrices colonnes X et AX sont données sous forme de liste. L'utilisation de la fonction `np.dot` de la bibliothèque `numpy` est proscrite.

Annexe : Rappels Python

On considère que le module `numpy` est importé via `import numpy as np`.

Python	Interprétation
`A[i, j]`	Coefficient d'indice (i, j) de la matrice A.
`A.shape[0]`	Renvoie le nombre de lignes de A.
`A.shape[1]`	Renvoie le nombre de colonnes de A.

On rappelle que pour une matrice A à n lignes et p colonnes, les indices vont de 0 à $n-1$ pour les lignes et de 0 à $p-1$ pour les colonnes.

Exercice 3 : Premiers pas sur les hyperplans.

On commence par donner la définition suivante :

Si E est un espace vectoriel de dimension finie,

on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E vérifiant $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) Étude de quelques cas particuliers.

a) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
En déduire que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

b) Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.
Montrer que $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(3) = 0\}$.
Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels, est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Résultats généraux.

Dans toute la question **2)**, on fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi qu'un hyperplan H de E.

a) Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $H \subset F$.
Montrer que l'on a soit $F = H$, soit $F = E$.

On fixe, dans toute la suite de la question **2)**, un vecteur $w \in E \backslash H$.

b) Soit $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ une base de H.
Justifier que $(h_1, \ldots, h_{n-1}, w)$ est une base de E.

c) Montrer que tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de H et d'un multiple de w, c'est-à-dire que :

$$\forall u \in E, \exists!(v, \lambda) \in H \times \mathbb{R}, u = v + \lambda w. \quad (*)$$

d) Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$, et l'on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de cet espace.
On cherche à montrer la réciproque du résultat obtenu à la question **1)b)**, c'est-à-dire que tout hyperplan de $\mathbb{R}^n$ a une équation cartésienne de la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$.
Pour cela, on décompose chacun des vecteurs de la base canonique à l'aide du résultat $(*)$ obtenu à la question précédente : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère $v_k \in H$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $e_k = v_k + \lambda_k w$.
Soit alors $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que :

$$x \in H \iff \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

3) En dimension infinie

a) Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ *(on admet que E est un $\mathbb{R}$-ev pour les opérations usuelles sur les fonctions).*
Soit F l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues sur $[0, 1]$ et telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$.
Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) *On garde les mêmes notations qu'à la question précédente.*
Même si l'on ne peut pas parler de dimensions ici (car E est de dimension infinie !), on dit quand même que F est un hyperplan de E, au sens où il vérifie une propriété similaire au $(*)$ du **2)c)**.
Plus précisément, en notant h la fonction constante égale à 1 ; montrer que :

$$\forall f \in E,\ \exists!(g, \lambda) \in F \times \mathbb{R},\ f = g + \lambda h$$

4) Une réciproque au résultat du 2)c) .
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de E.
On suppose qu'il existe $w \in E \backslash H$ tel que tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de H et d'un multiple de w.
Montrer qu'alors H est un hyperplan de E.

5) Intersection de deux hyperplans.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, si F et H sont deux hyperplans de E tels que $F \neq H$, alors $H \cap F$ est un hyperplan de F.
En déduire que $\dim(H \cap F) = n - 2$.
Remarque : ce résultat est la généralisation du fait que, dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux plans vectoriels distincts est une droite.

Rappel pour les 5/2 qui auraient le temps de faire la question 7) de l'exercice 1

Théorème. (*Changement de variable $x = \varphi(t)$ pour des intégrales généralisées.*)

Soient φ et f deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$,
Si φ est de classe C^1 et strictement monotone sur $]a, b[$, on note $\alpha = \lim\limits_{t \to a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim\limits_{t \to b^-} \varphi(t)$
et si f est continue sur $]\alpha, \beta[$,
alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$ converge
et en cas de convergence :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

FIN DU SUJET