

Exercice 1 :

- 1) $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$,
 $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$,
 $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$, donc

$$T_2 = 2X^2 - 1, \quad T_3 = 4X^3 - 3X \quad \text{et} \quad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$$

- 2) a)

```
def polyT(n, x):
    if n==0: return 1
    u, v = 1, x
    for k in range(n-1):
        u, v = v, 2*x*v - u
    return v
```

 # il faut n-1 tours pour que v contienne u_n
- b) [1] représente T_0 ,
 [0, 1] représente T_1 ,
 [-1, 0, 2] représente T_2 ,
 [0, -3, 0, 4] représente T_3 ,
 [1, 0, -8, 0, 8] représente T_4 ,
- c)

```
def suivant(P_0, P_1):
    n0, n1 = len(P_0), len(P_1)
    n = max(n0, n1 + 1)
    S = [0 for k in range(n)]
    for k in range(n1):
        S[k+1] = 2*P_1[k]
    for k in range(n0):
        S[k] = S[k] - P_0[k]
    return S
```

 # On cherche la taille de la liste représentant 2XP1-P0
 # On met dans S les coefficients de 2XP1
 # On soustrait à S les coefficients de P0
- d) C'est le même programme que dans a) mais avec des polynômes.
- ```
def polynome_T(n):
 if n == 0: return [1]
 U, V = [1], [0,1]
 for k in range(n-1):
 U, V = V, suivant(U, V)
 return V
```
- 3) a) On note pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}_n$  suivante :

" $T_n$  est un polynôme à coefficients entiers,  $T_n$  est de degré  $n$  et  $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ "

*Initialisation :*

Les polynômes  $T_0 = 1$  et  $T_1 = X$  sont à coefficients entiers et de degrés respectifs 0 et 1.

De plus, on a  $T_0(-X) = 1 = (-1)^0 T_0(X)$  et  $T_1(-X) = -X = (-1)^1 T_1(X)$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont vraies.

*Hérédité :* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies et démontrons  $\mathcal{P}(n+2)$ .

- Le polynôme  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$  est à coefficients entiers puisque ses coefficients sont obtenus en additionnant et multipliant par des entiers les coefficients de  $T_n$  et  $T_{n+1}$  qui sont des entiers d'après  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$ .

- Comme  $\deg T_{n+1} = n+1$  d'après  $\mathcal{P}(n+1)$ , on a  $\deg 2XT_{n+1} = n+2$ .

Dès lors, puisque  $\deg T_n = n$  d'après  $\mathcal{P}(n)$ , les deux polynômes  $2XT_{n+1}$  et  $T_n$  sont de degrés distincts donc  $\deg(2XT_{n+1} - T_n) = \max\{\deg 2XT_{n+1}; \deg T_n\} = n+2$ . Donc  $\deg T_{n+2} = n+2$ .

- Et enfin :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) \quad \text{relation définissant la suite } (T_n) \\ &= 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) \quad \text{par H.R.} \\ &= (-1)^{n+2} (2XT_{n+1}(X) - T_n(X)) \quad \text{car } (-1)^n = (-1)^{n+2} \\ &= (-1)^{n+2} T_{n+2}(X) \quad \text{relation définissant la suite } (T_n) \end{aligned}$$

Conclusion :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  est à coefficients entiers, de degré  $n$  et satisfait  $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

- b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question précédente,  $T_{n+1}$  est de degré  $n+1$  et  $T_n$  est de degré  $n$  donc le coefficient dominant de  $2XT_{n+1} - T_n$  est celui de  $2XT_{n+1}$ , c'est-à-dire  $2a_{n+1}$ .

Comme  $2XT_{n+1} - T_n = T_{n+2}$ , on en déduit que  $2a_{n+1} = a_{n+2}$ .

Cela démontre que  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison 2.

On en déduit que  $\forall n \geq 1, a_n = 2^{n-1}a_1$ . Or  $a_1 = 1$  puisque  $T_1 = X$ , donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, a_n = 2^{n-1}}$$

- c) Comme  $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ , on a (en évaluant en 0)

$$T_0(0) = 1, \quad T_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(0) = -T_n(0).$$

donc la suite  $(T_{2p+1}(0))$  est constante égale à 0 et que la suite  $(T_{2p}(0))$  vérifie  $\forall p \in \mathbb{N}, T_{2p}(0) = (-1)^p$ . Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}}$$

- 4) a) On sait que :  $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$  et  $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$  donc (en sommant membre à membre) on obtient :  $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$

$$\boxed{\text{pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))}$$

- b) Montrons par récurrence double sur  $n$  que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\underbrace{T_n(\cos(\theta))}_{\text{notée } \mathcal{P}_n} = \cos(n\theta)$ .

*Initialisation* : On a  $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0 \times \theta)$  et  $T_1(\cos \theta) = \cos \theta = \cos(1 \times \theta)$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont vraies.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies et démontrons  $\mathcal{P}(n+2)$ . On a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2(\cos(\theta))T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) && \text{relation définissant la suite } (T_n) \\ &= 2(\cos \theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) && \text{par H.R.} \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) && \text{avec la formule de 4)a)} \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

on a bien montré  $\mathcal{P}(n+2)$ .

*Conclusion* :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos \theta) = \cos n\theta}$$

- c) La relation de la question précédente appliquée pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  implique que  $T_n(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ , ce qui permet de retrouver

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}}$$

- d) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\theta)) = 0 &\iff \cos(n\theta) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, T_n\left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0,$$

de plus la fonction  $\cos$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$  donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{2n}\right), \dots, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \text{ sont } n \text{ racines distinctes de } T_n.}$$

- e) On sait que  $T_n$  est de degré  $n$  et on vient de trouver  $n$  racines distinctes donc il existe  $\lambda$  tel que

$$\forall n \geq 1, T_n = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$$

or pour  $n \geq 1$  on a montré à la question **3)b)** que le coefficient dominant de  $T_n$  vaut  $2^{n-1}$ .

$$\forall n \geq 1, \quad T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right)$$

5) a) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} R_n(\cos(\theta)) &= T_n(\cos(\theta)) - S_n(\cos(\theta)) \\ &= \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \quad (d'après 4)b)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$R_n(\cos(\theta)) = 0 \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}$$

b)  $R_n(\cos(\theta)) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  donc  $T_n$  possède une infinité de racines (tout les réels de  $[-1, 1]$ ) donc  $R_n$  est le polynôme nul et ainsi :

$$S_n = T_n$$

6) a) D'après 4)a) on a  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \cos(n\theta)$ .

$f$  est de classe  $C^\infty$  et  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f'(\theta) = -n \sin(n\theta)$  et  $f''(\theta) = -n^2 \cos(n\theta)$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f''(\theta) + n^2 f(\theta) = 0$$

b) On a aussi  $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = T_n(\cos(\theta))$  donc

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -\sin(\theta) T'_n(\cos \theta) \\ f''(\theta) &= -\cos(\theta) T'_n(\cos \theta) + \sin^2(\theta) T''_n(\cos \theta) \\ &= -\cos(\theta) T'_n(\cos \theta) + (1 - \cos^2(\theta)) T''_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

En remplaçant cela dans l'équation différentielle  $f''(\theta) + n^2 f(\theta) = 0$ , on a donc :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (1 - \cos^2(\theta)) T''_n(\cos \theta) - \cos(\theta) T'_n(\cos \theta) + n^2 T_n(\cos \theta) = 0$$

il vient que le polynôme  $(1 - X^2) T''_n(X) - X T'_n(X) + n^2 T_n(X) = 0$  admet une infinité de racines, donc

$$(1 - X^2) T''_n(X) - X T'_n(X) + n^2 T_n(X) = 0$$

7) a) Soient  $n$  et  $p$  deux entiers,

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \int_0^\pi \cos(nt) \cos(pt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((n+p)t) + \cos((n-p)t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+p)t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-p)t) dt \end{aligned}$$

Or on remarque que  $\int_0^\pi \cos(kt) dt = \pi \mathbb{1}_{k=0}$  (i.e :  $\int_0^\pi \cos(kt) dt = \pi$  si  $k = 0$  et  $\int_0^\pi \cos(kt) dt = 0$  sinon)

On en déduit que ;

$$\textcircled{1} \text{ si } n \neq p, \quad I_{n,q} = 0 \quad \textcircled{2} \text{ si } n = p \neq 0 \quad I_{n,q} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \textcircled{3} \text{ si } n = p = 0 \text{ alors } I_{n,q} = \pi$$

b) (non corrigé)

## Exercice 2 :

- 1) - La première fonction ne fonctionne pas car elle renvoie **True** dès qu'il y a au moins un coefficient nul sous la diagonale (alors qu'il faudrait que tous les coefficients sous la diagonale soient nuls).
- La seconde fonction ne fonctionne pas car elle renvoie **False** pour la matrice nulle (qui est pourtant triangulaire supérieure!).
- La troisième fonction fonctionne bien. Elle s'arrête et renvoie **False** dès qu'elle rencontre un coefficient non nul sous la diagonale. Lorsque, au contraire, tous les coefficients sous la diagonale sont nuls (i.e. lorsque la matrice est triangulaire supérieur), elle renvoie bien **True**.
- La quatrième fonction ne fonctionne pas car elle détecte les matrices triangulaires inférieures et non supérieures.

Remarque : Dans le sujet original il y avait deux coquilles : il manquait un espace à la première ligne de `testTriangSup3` et il y avait une erreur d'indentation à la troisième ligne de `testTriangSup4` (pas d'erreurs ailleurs).

- 2) `def testsym(A):`  
`nbLignes, nbCols = A.shape`  
`if nbLignes != nbCols:` # Si la matrice n'est pas carrée  
`return False` # on renvoie False  
`for i in range(Nb_lignes(A)):`  
`for j in range(i):`  
`if A[i][j] != A[j][i]:`  
`return False` # On ne renvoie True que lorsqu'on a parcouru  
`return True` # Tous les coefficients sous la diagonale.
- 3) Cette fonction `testMystere` renvoie `True` si la matrice  $A$  possède exactement un élément non nul dans chaque colonne, et renvoie `False` sinon. En effet, la variable compteur compte le nombre d'éléments non nuls dans une colonne donnée; si ce nombre diffère de 1, la fonction s'arrête alors et renvoie `False`. Sinon l'exécution se poursuit en examinant les colonnes suivantes.
- 4) La  $i$ ème valeur de  $AX$  est la somme :  $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$

```
def prodMat(A, X):
 Y = []
 n = len(X)
 p, q = A.shape
 if n != q: return None # on vérifie que le produit est possible
 for i in range(p):
 s = 0
 for j in range(n):
 s += A[i,j]*X[j]
 Y.append(s)
 return Y # ou np.array(Y)
```

### Exercice 3 :

- 1) a)  $(x, y, z) \in F \iff 2x + 3y + z = 0 \iff z = -2x - 3y$ , donc

$$F = \{(x, y, -2x - 3y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -2), (0, 1, -3))$$

Ainsi :

- $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  ;
- $\{(1, 0, -2), (0, 1, -3)\}$  est une famille génératrice de  $F$  ;
- cette famille est aussi libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de  $F$ .

On en déduit en particulier que  $\dim F = 2 = \dim(\mathbb{R}^3) - 1$  ; ainsi,  $F$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ .

- b) Je ne veux pas perdre de temps ici, j'utilise un argument efficace :

$F$  est l'ensemble des solutions d'un système homogène donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , de plus  $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$  donc le rang du système est 1 et ainsi  $\dim(F) = n - 1$ .

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\} \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^n$$

- c) Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(3) = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^n a_k 3^k = 0 \\ &\iff a_0 = -\sum_{k=1}^n 3^k a_k \\ &\iff P = -\sum_{k=1}^n 3^k a_k + \sum_{k=1}^n a_k X^k \\ &\iff P = \sum_{k=1}^n a_k (X^k - 3^k) \end{aligned}$$

donc  $F = \text{vect}((X^k - 3^k)_{1 \leq k \leq n})$  et la famille  $(X^k - 3^k)_{1 \leq k \leq n}$  est libre

(non nuls et de degré 2 à 2 distincts)

donc  $F$  est sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$  de dimension  $n$  et comme  $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$  on a bien :

$$\boxed{F \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}_n[X]}$$

d) Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} A \in S_2(\mathbb{R}) &\iff A^\top = A \\ &\iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a_{2,1} = a_{1,2} \\ a_{3,1} = a_{1,3} \end{cases} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} \mid (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{ m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 \mid (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3 \} \end{aligned}$$

$$\text{en notant : } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $S_2(\mathbb{R}) = \text{Vect} \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$  et  $(A_1, A_2, A_3)$  est libre.  $m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0 \implies m_1 = m_2 = m_3 = 0$

donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de dimension 3.

or  $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$  donc

$$\boxed{S_2(\mathbb{R}) \text{ est un hyperplan de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

2) a) On a  $H \subset F \subset E$ , donc  $n - 1 \leq \dim F \leq n$ .

Deux cas sont donc possibles :

- 1er cas :  $\dim F = n = \dim E$ , auquel cas on a  $F = E$  ( $F \subset E$  et égalité de dimension);
- 2ième cas :  $\dim F = n - 1 = \dim H$ , auquel cas on a  $F = H$  ( $H \subset F$  et égalité de dimension).

donc

$$\boxed{F = H \text{ ou } F = E}$$

b)  $(h_1, \dots, h_{n-1}, w)$  est formée de  $n$  vecteurs et  $\dim(E) = n$

Il suffit donc de montrer que cette famille est libre.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k h_k + \lambda_n w = 0_E$

si  $\lambda_n$  était non nul alors on aurait  $w = -\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k h_k$  mais c'est impossible car on a supposé  $w \notin \text{Vect}(h_1, \dots, h_{n-1})$

donc  $\lambda_n = 0$  et alors il vient :  $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k h_k$  et comme  $(h_1, \dots, h_{n-1})$  est libre on a bien :  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$

ce qui achève la démonstration de la liberté de  $(h_1, \dots, h_{n-1}, w)$ .

$$\boxed{(h_1, \dots, h_{n-1}, w) \text{ est une base de } E}$$

c) *Existence* :

La famille  $(h_1, \dots, h_{n-1}, w)$  est génératrice de  $E$  donc :

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : u = \underbrace{\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{n-1} h_{n-1}}_{\in H} + \lambda_n w.$$

Cela montre donc que :

$$\forall u \in E, \exists (v, \lambda) \in H \times \mathbb{R} : u = v + \lambda w$$

*Unicité.*

Pour cela, considérons  $v_1, v_2 \in F$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , et supposons que  $v_1 + \lambda w = v_2 + \mu w$ . On a donc

$$v_1 - v_2 = (\mu - \lambda)w$$

Mais alors, si  $\lambda \neq \mu$ , on a  $w = \frac{1}{\mu - \lambda} (v_1 - v_2) \in H$  ce qui est impossible car on a supposé  $w \notin H$ .

Par conséquent,  $\lambda = \mu$ , d'où l'on déduit que  $v_1 - v_2 = 0_E$  et donc que  $v_1 = v_2$ . Cela prouve l'unicité recherchée.

$$\boxed{\forall u \in E, \exists! (v, \lambda) \in H \times \mathbb{R} : u = v + \lambda w}$$

d) On sait que :

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ &= x_1 (v_1 + \lambda_1 w) + \dots + x_n (v_n + \lambda_n w) \\ &= \underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n}_{\in H} + (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) w \end{aligned}$$

Double implication :

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . Alors, d'après ce qui précède,

$$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in H$$

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $x \in H$ . On a alors :

$$x = \underbrace{x}_{\in H} + 0 \cdot w = \underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n}_{\in H} + (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) w$$

donc par unicité de l'écriture dans la décomposition (\*), on en déduit que  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ .

3) a) ❶ La fonction nulle appartient à  $F$  (car elle est continue et d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ ).

❷ Soient  $f, g \in F$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Puisque  $f, g \in F$ , on a  $\int_0^1 f(t) dt = 0$  et  $\int_0^1 g(t) dt = 0$ . Mais alors :

$$\int_0^1 (\lambda f + \mu g)(t) dt = \int_0^1 \lambda f(t) dt + \int_0^1 \mu g(t) dt = \lambda \int_0^1 f(t) dt + \mu \int_0^1 g(t) dt = 0.$$

Ainsi  $\lambda f + \mu g \in F$ . On a donc montré que  $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$ .

b) Remarque du correcteur : On cherche à montrer l'existence et l'unicité d'un certain objet pour l'instant inconnu. On va donc procéder par analyse-synthèse.

Soit  $f \in E$ .

Analyse.

Supposons que  $f = g + \lambda h$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $g \in F$ .

Alors par définition de  $F$ , on a  $\int_0^1 g(t) dt = 0$ .

Pour exploiter cela, passons à l'intégrale dans l'égalité  $f = g + \lambda h$  :

$$\int_0^1 f(t) dt = \underbrace{\int_0^1 g(t) dt}_{=0} + \lambda \underbrace{\int_0^1 h(t) dt}_{=1}$$

On en déduit donc que  $\lambda = \int_0^1 f(t) dt$ , puis que  $g = f - \lambda h = f - \left( \int_0^1 f(t) dt \right) h$ .

Cela prouve que si  $(g, \lambda)$  existe alors il est unique.

Synthèse : Réciproquement, posons  $\lambda = \int_0^1 f(t) dt$  et  $g = f - \lambda h$ .

On a bien  $f = g + \lambda h$ .

Il reste à justifier que  $g \in F$  ; or :

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \lambda \underbrace{\int_0^1 h(t) dt}_{=1} = \int_0^1 f(t) dt - \lambda = 0.$$

Ainsi le couple  $(g, \lambda)$  trouvé lors de l'analyse convient bien, ce qui établit l'existence d'un tel couple.

$$\boxed{\forall f \in E, \exists! (g, \lambda) \in F \times \mathbb{R}, f = g + \lambda h}$$

4) • Déjà, commençons par remarquer que  $H \neq E$  (en effet, par hypothèse,  $w \in E \setminus H$ ).

Cela implique que  $\dim H \leq n - 1$  (en effet si l'on avait  $\dim H = \dim E$ , on en déduirait que  $H = E$  puisque  $H \subset E$ ).

• Notons  $p = \dim H$  ; on cherche à prouver que  $p \geq n - 1$ . Pour cela, considérons une base  $(h_1, \dots, h_p)$  de  $H$ .

Puisque, par hypothèse, tout vecteur de  $E$  peut s'écrire comme somme d'un vecteur de  $H$  et d'un multiple de  $w$ , on en déduit que

$$E = \text{Vect}(h_1, \dots, h_p, w)$$

Ainsi  $(h_1, \dots, h_p, w)$  est génératrice de  $E$  ; cela entraîne que son cardinal  $(p + 1)$  est supérieur à  $\dim(E) = n$ . En d'autres termes :  $p \geq n - 1$ .

• En combinant les deux points précédents, on en déduit que  $\dim H = \dim E - 1$ .

Ainsi,  $\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E.}$

5) Commençons par remarquer que  $F \not\subset H$ .

En effet, si l'on avait  $F \subset H$ , on en déduirait que  $F = H$  (en effet  $\dim F = \dim H$ ), ce qui n'est pas le cas. On peut donc considérer  $w \in F \setminus H$ . En appliquant le résultat (\*) :

$$\forall u \in E, \exists!(v, \lambda) \in H \times \mathbb{R} : u = v + \lambda w$$

Notamment, en particulier :

$$\forall u \in \boxed{F}, \exists!(v, \lambda) \in H \times \mathbb{R} : u = v + \lambda w.$$

Dans la décomposition ci-dessus, remarquons de plus que  $v = \underbrace{u}_{\in F} - \lambda \underbrace{w}_{\in F} \in F$ .

Puisque  $v \in H$ , on a donc  $v \in H \cap F$ .

En résumé, on a donc trouvé un vecteur  $w \in F \setminus H = F \setminus (H \cap F)$  tel que :

$$\forall u \in F, \exists!(v, \lambda) \in (H \cap F) \times \mathbb{R}, u = v + \lambda w$$

D'après la question précédente,  $\underline{H \cap F}$  est donc un hyperplan de  $F$ . En particulier :

$$\dim(H \cap F) = \dim(F) - 1 = \dim(E) - 2 = n - 2$$

**FIN DE LA CORRECTION**