Table des matières

1 Cardinal

1.1 Définition

Définition :

Dire qu'un ensemble non vide E est fini
signifie qu'il existe un entier naturel n et une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans E.
Ce nombre n est alors unique et est appelé cardinal de E.

Proposition :

Soient E et F deux ensembles finis,
E et F ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre E et F.

1.2 Propriétés du cardinal.

Propositions : (*parties d'un ensemble fini*)

① Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.
Soit E un ensemble fini et A et B deux parties de E,

② **Si** $A \subset B$ **alors** $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$

③ $A \subset B$ et $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ **si, et seulement si,** $A = B$.

④ **Si** A et B sont deux parties disjointes de E (ie : $A \cap B = \varnothing$), **alors** :

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$

Théorème : (*Réunion de parties deux à deux disjointes.*)

Si $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de p parties deux à deux disjointes, alors

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{card}(A_i)$$

Remarques :

"2 à 2 disjointes" : $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

Si les $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont deux à deux disjoints et si $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ alors : $\quad \mathrm{card}(B) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{card}(A_k)$

Définition : *(Complément)*

Si $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de p parties d'un même ensemble E et B est une partie de E.
Dire que $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une partition de B signifie que :

❶ les $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont deux à deux disjoints et ❷ $B = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$

Remarque : Certains rajoutent la condition : ❸ $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad A_k \neq \varnothing$

Théorème : (*Réunion de deux ou trois parties quelconques.*)

• Si A et B sont deux parties de E, alors :

$$\text{card}(A\cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A\cap B)$$

• Si A, B et C sont trois parties de E, alors :

$$\begin{aligned}\text{card}(A\cup B\cup C) &= \text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)\\ &\quad -\text{card}(A\cap B)-\text{card}(B\cap C)-\text{card}(A\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Remarque : On peut généraliser ce théorème souvent appelé théorème de Poincaré ?

Théorème : (*produit cartésien*)

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A\times B$ est un ensemble fini et :

$$\text{card}(A\times B) = \text{card}(A)\,\text{card}(B)$$

2 Dénombrement des ensembles classiques.

2.1 Ensemble des p-listes ou p-uplets.

Définition :

On appelle p-listes d'un ensemble E, les éléments du produit cartésien E^p.

Remarque : cette définition ne se restreint pas aux ensembles finis.

Notation : Les listes sont notées : $\big(x_1, x_2, ..., x_p\big)$, *avec des parenthèses* ! ! !

Autre présentation.

Les listes de p éléments de E sont notés $(x_1, ..., x_p)$ avec les $x_i \in E$ et la propriété :

$$(x_1, ..., x_p) = (x'_1, ..., x'_p) \iff \forall i \in [\![1, p]\!], \quad x_i = x'_i$$

Proposition :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n, le nombre de p-listes E est égale à : n^p

Remarque : $\operatorname{card}(E^p) = \operatorname{card}(E)^p$

Tirages dans une urne :

Les listes permettent de modéliser **les tirages successifs avec remise** dans une urne.

Simulation : *voir la feuille 5 d'informatique.*

2.2 Ensemble des p-uplets sans répétition (arrangements).

Dire qu'une p-liste $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est sans répétition signifie que $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$

Proposition :

Etant donné deux entiers n et p strictement positifs ($p \leqslant n$) et E un ensemble de cardinal n.

Le nombre de p-listes sans répétition d'éléments de E est égal à : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Remarque : $n(n-1)\cdots(n-p+1) \;=\; \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(n-k) \;=\; \frac{n!}{(n-p)!} \;=\; p!\binom{n}{p}$

Tirages dans une urne :

Les listes sans répétition permettent de modéliser **les tirages successifs sans remise** dans une urne.

Simulation : *voir la feuille 5 d'informatique.*

2.3 Ensemble des permutations.

Définition

Soit E un ensemble fini, une liste contenant exactement une fois chaque élément de E est appelée une permutation de E.

Proposition

Si $\text{card}(E) = n$ le nombre de permutations de E est égal à : $n!$.

Tirages dans une urne :

Les permutations permettent de modéliser **les tirages successifs sans remise de tous les objets** d'une urne.

2.4 Ensemble des p-combinaisons d'un ensemble fini.

Définition :

Soit $p \in \mathbb{N}$, une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E à p éléments.

Notation :

Une combinaison s'écrit $\boxed{\left\{x_1, x_2, \ldots, x_p\right\}}$ (*des accolades* !!) avec $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$

Proposition :

Etant donné deux entiers n et p tels que $p \leqslant n$ et E un ensemble de cardinal n.

Le nombre de p-combinaisons est égal à : $\dfrac{1}{p!} \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dbinom{n}{p}$

Tirages dans une urne : Les combinaisons permettent de modéliser **les tirages simultanés** dans une urne.

Simulation : on se ramène usuellement à un tirage successif sans remise.

Remarque : Le nombre de listes strictement croissantes de p éléments de $[\![1;n]\!]$ est égal à $\dbinom{n}{p}$.

2.5 Nombre de parties d'un ensemble fini.

Théorème :

Soit E un ensemble fini à n éléments, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et :

$$\text{card}\left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^n$$

Démonstration.

2.6 Complément : Nombre d'anagrammes.

Théorème des anagrammes.

Soit un "mot" $\mathcal{M}$ formé de p lettres distinctes $A_1, A_2, \cdots A_p$, la lettre A_1 apparaît n_1 fois, ... , la lettre A_p apparaît n_p fois. (La longueur de $\mathcal{M}$ vaut $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$).

Le nombre d'anagrammes de ce mot est égal à : $\dfrac{N!}{n_1!\, n_2! \,\cdots\, n_p!}$

ou encore $\dbinom{N}{n_1}\dbinom{N-n_1}{n_2}\dbinom{N-n_1-n_2}{n_3}\cdots\dbinom{n_{p-1}+n_p}{n_{p-1}}$

3

Applications et cardinal (complément).

3.1 Nombre d'applications entre deux ensembles finis.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls,

E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.

Le nombre d'applications de E dans F est égal à p^n

3.2 Nombre d'injections entre deux ensembles finis.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls,

E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.

Le nombre d'injections de E dans F est égal à : $\underbrace{p(p-1)\cdots(p-n+1)}_{n \text{ facteurs}}$.

3.3 Nombre de bijections entre deux ensembles finis.

Soient n un entier naturel non nul,

E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = n$.

Le nombre de bijections de E dans F est égal à $n!$

3.4 Conditions nécessaires sur les cardinaux.

Proposition :

Soit E et F deux ensembles finis,

S'il existe une injection de E dans F alors $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$

S'il existe une surjection de E dans F alors $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$

S'il existe une bijection de E dans F alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

3.5 Application entre deux ensembles de même cardinal.

Proposition :

Soit $f : E \to F$ avec E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

f est injective si, et seulement si, f est bijective.

f est surjective si, et seulement si, f est bijective.