# 1 Cardinal

## 1.1 Définition

**Définition :**

Dire qu'un ensemble non vide $E$ est fini
signifie qu'il existe un entier naturel $n$ et une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans $E$.
Ce nombre $n$ est alors unique et est appelé cardinal de $E$.

**Proposition :**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis,
$E$ et $F$ ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre $E$ et $F$.

## 1.2 Propriétés du cardinal.

**Propositions :** (*parties d'un ensemble fini*)

❶ Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.

Soit $E$ un ensemble fini et $A$ et $B$ deux parties de $E$,

❷ **Si** $A \subset B$ **alors** $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$

❸ $A \subset B$ et $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ **si, et seulement si,** $A = B$.

❹ **Si** $A$ et $B$ sont deux parties disjointes de $E$ ( ie : $A \cap B = \varnothing$), **alors** :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

❺ $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

**Théorème :** (*Réunion de parties deux à deux disjointes.*)

Si $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de $p$ parties deux à deux disjointes, alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \text{card}(A_i)$$

**Remarques :**

"2 à 2 disjointes" : $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

Si les $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont deux à deux disjoints et si $B = \bigcup_{k=1}^{p} A_k$ alors : $\quad \text{card}(B) = \sum_{k=1}^{p} \text{card}(A_k)$

**Lemme des bergers.**

Si les $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont deux à deux disjoints, si $B = \bigcup_{k=1}^{p} A_k$ et si $\mathrm{card}(A_k) = m$

alors : $\quad \mathrm{card}(B) = p \times m$

**Définition :** *(Complément)*

Si $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de $p$ parties d'un même ensemble $E$ et $B$ est une partie de $E$.
Dire que $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une partition de $B$ signifie que :

❶ les $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont deux à deux disjoints, ❷ $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et ❸ $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad A_k \neq \varnothing$

**Remarque** : En probabilité on parle souvent de partition même si certains événements sont vides.

**Théorème :** (*Réunion de deux ou trois parties quelconques.*)

- Si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$, alors :

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$$

- Si $A$, $B$ et $C$ sont trois parties de $E$, alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) \\ &\quad - \mathrm{card}(A \cap B) - \mathrm{card}(B \cap C) - \mathrm{card}(A \cap C) + \mathrm{card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

**Remarque :** On peut généraliser ce théorème souvent appelé formule de Poincaré ou formule du crible.

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \mathrm{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

**Théorème :** (*produit cartésien*)

Si $A$ et $B$ sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est un ensemble fini et :

$$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A)\,\mathrm{card}(B)$$

**Remarque :** On peut généraliser

$$\mathrm{card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathrm{card}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{card}(A_n)$$

# 2

# Dénombrement des ensembles classiques.

## 2.1 Ensemble des $p$-listes ou $p$-uplets.

**Définition :**

On appelle $p$-listes d'un ensemble $E$, les éléments du produit cartésien $E^p$.

**Remarque :** cette définition ne se restreint pas aux ensembles finis.

Notation : Les listes sont notées : $\big(x_1, x_2, ..., x_p\big)$ , *avec des parenthèses* ! ! !

Les listes de $p$ éléments de $E$ sont notés $(x_1, ..., x_p)$ avec les $x_i \in E$ et la propriété :

$$(x_1, ..., x_p) = (x'_1, ..., x'_p) \iff \forall i \in [\![1, p]\!], \quad x_i = x'_i$$

**Attention :** $(1, 2, 1) \neq (2, 1, 1)$
**Proposition :**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $E$ un ensemble fini de cardinal $n$, le nombre de $p$-listes $E$ est égale à : $n^p$

**Remarque :** $\mathrm{card}(E^p) = \mathrm{card}(E)^p$

**Tirages dans une urne :**

Les listes permettent de modéliser **les tirages successifs avec remise** dans une urne.

## 2.2 Ensemble des $p$-uplets sans répétition (arrangements).

Dire qu'une $p$-liste $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est sans répétition signifie que $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$

**Proposition :**

Etant donné deux entiers $n$ et $p$ strictement positifs ($p \leqslant n$) et $E$ un ensemble de cardinal $n$.
Le nombre de $p$-listes sans répétition d'éléments de $E$ est égal à : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

**Remarque** : $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(n-k) = \frac{n!}{(n-p)!} = p!\binom{n}{p}$

**Tirages dans une urne :**

Les listes sans répétition permettent de modéliser **les tirages successifs sans remise** dans une urne.

## 2.3 Ensemble des permutations.

**Définition**

Soit $E$ un ensemble fini, une liste contenant exactement une fois chaque élément de $E$ est appelée une permutation de $E$.

**Proposition**

Si $\mathrm{card}(E) = n$ le nombre de permutations de $E$ est égal à : $n!$ .

**Tirages dans une urne :**

Les permutations permettent de modéliser **les tirages successifs sans remise de tous les objets** d'une urne.

## 2.4 Ensemble des $p$-combinaisons d'un ensemble fini.

**Définition :**

Soit $p \in \mathbb{N}$, une combinaison de $p$ éléments de $E$ est un sous-ensemble de $E$ à $p$ éléments.

**Notation :**

Une combinaison s'écrit $\boxed{\left\{x_1, x_2, \ldots, x_p\right\}}$ (*des accolades* !! ) avec $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$

**Proposition :**

Etant donné deux entiers $n$ et $p$ tels que $p \leqslant n$ et $E$ un ensemble de cardinal $n$.

Le nombre de $p$-combinaisons est égal à : $\dfrac{1}{p!} \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dbinom{n}{p}$

**Tirages dans une urne :** Les combinaisons permettent de modéliser **les tirages simultanés** dans une urne.

**Simulation** : on se ramène usuellement à un tirage successif sans remise.

**Proposition** : Le nombre de listes strictement croissantes de $p$ éléments de $[\![1;n]\!]$ est égal à $\dbinom{n}{p}$.

## 2.5 Nombre de parties d'un ensemble fini.

**Théorème :**

Soit $E$ un ensemble fini à $n$ éléments, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de $E$ est fini et :

$$\mathrm{card}\left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^n$$

**Démonstration.**

## 2.6 Complément : Nombre d'anagrammes.

**Théorème des anagrammes.**

Soit un "mot" $\mathcal{M}$ formé de $p$ lettres distinctes $A_1, A_2, \cdots A_p$, la lettre $A_1$ apparaît $n_1$ fois, ... , la lettre $A_p$ apparaît $n_p$ fois. (La longueur de $\mathcal{M}$ vaut $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$).

Le nombre d'anagrammes de ce mot est égal à : $\dfrac{N!}{n_1!\, n_2! \cdots n_p!}$

ou encore $\dbinom{N}{n_1}\dbinom{N-n_1}{n_2}\dbinom{N-n_1-n_2}{n_3}\cdots\dbinom{n_{p-1}+n_p}{n_{p-1}}$

# 3

# Somme sur un ensemble fini.

**Définition, notation** :

Soient $E$ un ensemble fini, tel que $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ avec $\mathrm{card}(E) = n$
et $f$ une application de $E$ dans $F$ avec $F$ un ensemble muni d'une somme.

On note : $\displaystyle\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)$

**Propositions :**

Soit $E$ un ensemble fini,

❶ Si $A_1$, $A_2$ , …, $A_p$ forment une partition de $E$ alors :

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{k=1}^{p} \left( \sum_{x \in A_k} f(x) \right)$$

❷ Si $\sigma$ est une bijection de $E$ dans $E$,

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in E} f(\sigma(x))$$

*On ne change pas la somme si on modifie l'ordre dans lequel on fait la somme.*

❸ $\displaystyle\mathrm{card}(E) = \sum_{x \in E} 1$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{x \in E} \lambda = \lambda \,\mathrm{card}(E)$

❹ Soit $A$ une partie de $E$,

$$\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

# 4

# Applications et cardinal (complément).

## 4.1 Nombre d'applications entre deux ensembles finis.

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls,
$E$ et $F$ deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.
Le nombre d'applications de $E$ dans $F$ est égal à $p^n$

## 4.2 Nombre d'injections entre deux ensembles finis.

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls,
$E$ et $F$ deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.
Le nombre d'injections de $E$ dans $F$ est égal à : $\underbrace{p(p-1)\cdots(p-n+1)}_{n \text{ facteurs}}$.

## 4.3 Nombre de bijections entre deux ensembles finis.

Soient $n$ un entier naturel non nul,
$E$ et $F$ deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = n$.
Le nombre de bijections de $E$ dans $F$ est égal à $n!$

## 4.4 Conditions nécessaires sur les cardinaux.

**Proposition :**

Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis,
S'il existe une injection de $E$ dans $F$ alors $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$
S'il existe une surjection de $E$ dans $F$ alors $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$
S'il existe une bijection de $E$ dans $F$ alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

## 4.5 Application entre deux ensembles de même cardinal.

**Proposition :**

Soit $f : E \to F$ avec $E$ et $F$ deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

$f$ est injective si, et seulement si, $f$ est bijective.

$f$ est surjective si, et seulement si, $f$ est bijective.