

Table des matières

1	Cardinal	2
1.1	Définition	2
1.2	Propriétés du cardinal.	2
2	Dénombrement des ensembles classiques.	4
2.1	Ensemble des p -listes ou p -uplets.	4
2.2	Ensemble des p -uplets sans répétition (arrangements).	4
2.3	Ensemble des permutations.	5
2.4	Ensemble des p -combinaisons d'un ensemble fini.	5
2.5	Nombre de parties d'un ensemble fini.	5
2.6	Complément : Nombre d'anagrammes.	5
3	Somme sur un ensemble fini.	6
4	Applications et cardinal (complément).	7
4.1	Nombre d'applications entre deux ensembles finis.	7
4.2	Nombre d'injections entre deux ensembles finis.	7
4.3	Nombre de bijections entre deux ensembles finis.	7
4.4	Conditions nécessaires sur les cardinaux.	7
4.5	Application entre deux ensembles de même cardinal.	7

1.1 Définition

Définition :

Dire qu'un ensemble non vide E est fini signifie qu'il existe un entier naturel n et une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans E .
Ce nombre n est alors unique et est appelé cardinal de E .

Proposition :

Soient E et F deux ensembles finis,
 E et F ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre E et F .

1.2 Propriétés du cardinal.

Propositions : (*parties d'un ensemble fini*)

❶ Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.

Soit E un ensemble fini et A et B deux parties de E ,

❷ **Si** $A \subset B$ **alors** $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$

❸ $A \subset B$ et $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ **si, et seulement si,** $A = B$.

❹ **Si** A et B sont deux parties disjointes de E (ie : $A \cap B = \emptyset$), **alors :**

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

❺ $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

Théorème : (*Réunion de parties deux à deux disjointes.*)

Si $(A_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ est une famille de p parties deux à deux disjointes, alors

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i)$$

Remarques :

"2 à 2 disjointes" : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

Si les $(A_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ sont deux à deux disjointes et si $B = \bigcup_{k=1}^p A_k$ alors : $\text{card}(B) = \sum_{k=1}^p \text{card}(A_k)$

Lemme des bergers.

Si les $(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ sont deux à deux disjoints, si $B = \bigcup_{k=1}^p A_k$ et si $\text{card}(A_k) = m$
alors : $\text{card}(B) = p \times m$

Définition : (*Complément*)

Si $(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une famille de p parties d'un même ensemble E et B est une partie de E .
Dire que $(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une partition de B signifie que :

❶ les $(A_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ sont deux à deux disjoints , ❷ $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et ❸ $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_k \neq \emptyset$

Remarque : En probabilité on parle souvent de partition même si certains événements sont vides.

Théorème : (*Réunion de deux ou trois parties quelconques.*)

- Si A et B sont deux parties de E , alors :
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$
- Si A, B et C sont trois parties de E , alors :
$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Remarque : On peut généraliser ce théorème souvent appelé formule de Poincaré ou formule du crible.

$$\text{card} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} \text{card} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$$

Théorème : (*produit cartésien*)

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est un ensemble fini et :

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \text{card}(B)$$

Remarque : On peut généraliser

$$\text{card}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \text{card}(A_1) \times \cdots \times \text{card}(A_n)$$

Dénombrement des ensembles classiques.

2.1 Ensemble des p -listes ou p -uplets.

Définition :

On appelle p -listes d'un ensemble E , les éléments du produit cartésien E^p .

Remarque : cette définition ne se restreint pas aux ensembles finis.

Notation : Les listes sont notées : (x_1, x_2, \dots, x_p) , avec des parenthèses!!!

Les listes de p éléments de E sont notés (x_1, \dots, x_p) avec les $x_i \in E$ et la propriété :

$$(x_1, \dots, x_p) = (x'_1, \dots, x'_p) \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad x_i = x'_i$$

Attention : $(1, 2, 1) \neq (2, 1, 1)$

Proposition :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n , le nombre de p -listes E est égale à : n^p

Remarque : $\text{card}(E^p) = \text{card}(E)^p$

Tirages dans une urne :

Les listes permettent de modéliser les tirages successifs avec remise dans une urne.

2.2 Ensemble des p -uplets sans répétition (arrangements).

Dire qu'une p -liste (x_1, x_2, \dots, x_p) est sans répétition signifie que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies x_i \neq x_j$

Proposition :

Etant donné deux entiers n et p strictement positifs ($p \leq n$) et E un ensemble de cardinal n .

Le nombre de p -listes sans répétition d'éléments de E est égal à : $\underbrace{n(n-1) \cdots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Remarque : $n(n-1) \cdots (n-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1} (n-k) = \frac{n!}{(n-p)!} = p! \binom{n}{p}$

Tirages dans une urne :

Les listes sans répétition permettent de modéliser les tirages successifs sans remise dans une urne.

2.3 Ensemble des permutations.

Définition

Soit E un ensemble fini, une liste contenant exactement une fois chaque élément de E est appelée une permutation de E .

Proposition

Si $\text{card}(E) = n$ le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Tirages dans une urne :

Les permutations permettent de modéliser les **tirages successifs sans remise de tous les objets** d'une urne.

2.4 Ensemble des p -combinaisons d'un ensemble fini.

Définition :

Soit $p \in \mathbb{N}$, une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E à p éléments.

Notation :

Une combinaison s'écrit $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ (des accolades!!) avec $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j$

Proposition :

Etant donné deux entiers n et p tels que $p \leq n$ et E un ensemble de cardinal n .

Le nombre de p -combinaisons est égal à : $\frac{1}{p!} \underbrace{n(n-1) \cdots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \binom{n}{p}$

Tirages dans une urne : Les combinaisons permettent de modéliser les **tirages simultanés** dans une urne.

Simulation : on se ramène usuellement à un tirage successif sans remise.

Proposition : Le nombre de listes strictement croissantes de p éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est égal à $\binom{n}{p}$.

2.5 Nombre de parties d'un ensemble fini.

Théorème :

Soit E un ensemble fini à n éléments, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

Démonstration.

2.6 Complément : Nombre d'anagrammes.

Théorème des anagrammes.

Soit un "mot" \mathcal{M} formé de p lettres distinctes A_1, A_2, \dots, A_p , la lettre A_1 apparaît n_1 fois, ... , la lettre A_p apparaît n_p fois. (La longueur de \mathcal{M} vaut $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$).

Le nombre d'anagrammes de ce mot est égal à : $\frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_p!}$

ou encore $\binom{N}{n_1} \binom{N-n_1}{n_2} \binom{N-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n_{p-1}+n_p}{n_{p-1}}$

Somme sur un ensemble fini.

Définition, notation :

Soient E un ensemble fini, tel que $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ avec $\text{card}(E) = n$
 et f une application de E dans F avec F un ensemble muni d'une somme.

On note :
$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i)$$

Propositions :

Soit E un ensemble fini,

- ❶ Si A_1, A_2, \dots, A_p forment une partition de E alors :

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{x \in A_k} f(x) \right)$$

- ❷ Si σ est une bijection de E dans E ,

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in E} f(\sigma(x))$$

On ne change pas la somme si on modifie l'ordre dans lequel on fait la somme.

- ❸ $\text{card}(E) = \sum_{x \in E} 1$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{x \in E} \lambda = \lambda \text{card}(E)$

- ❹ Soit A une partie de E ,

$$\text{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Applications et cardinal (complément).

4.1 Nombre d'applications entre deux ensembles finis.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls,
 E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.
 Le nombre d'applications de E dans F est égal à p^n

4.2 Nombre d'injections entre deux ensembles finis.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls,
 E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.
 Le nombre d'injections de E dans F est égal à : $\underbrace{p(p-1) \cdots (p-n+1)}_{n \text{ facteurs}}$.

4.3 Nombre de bijections entre deux ensembles finis.

Soient n un entier naturel non nul,
 E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = n$.
 Le nombre de bijections de E dans F est égal à $n!$

4.4 Conditions nécessaires sur les cardinaux.

Proposition :

Soit E et F deux ensembles finis,
 S'il existe une injection de E dans F alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$
 S'il existe une surjection de E dans F alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$
 S'il existe une bijection de E dans F alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

4.5 Application entre deux ensembles de même cardinal.

Proposition :

Soit $f : E \rightarrow F$ avec E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

f est injective si, et seulement si, f est bijective.

f est surjective si, et seulement si, f est bijective.