Feuille_Cours_4_bis : Probabilités.

Définition. *(Probabilité.Définition de première année)*

Propriétés. *Evénements impossibles, unions disjointes, inclusion, Formule de Poincaré.*

Ex 1 : 1) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements vérifiant : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = 0$,

Montrer que : $P\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$.

2) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements vérifiant : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = 1$,

Montrer que : $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

3) **Application :** On lance indéfiniment un dé. Quelle est la probabilité de n'avoir jamais la face ❻ ?

Ex 2 : 1) Démontrer que :

si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} P(A_n)$ converge.

2) En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

---

*En plus des propriétés habituelles vues en première année, on a besoin de la propriété suivante (**$\boldsymbol{\sigma}-$additivité**) :*

Ex 3 : 1) On lance indéfiniment une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier pile.
Quelle est la probabilité que X soit un nombre pair ?
Indication : C'est une situation classique modélisée par la donnée de la suite (F_n) définie par :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad F_n : \text{"le nième lancer donne Face"}.$$

Les événements de (F_n) sont mutuellement indépendants.

2) Reprendre la question précédente avec une pièce truquée donnant pile avec une probabilité $p \in]0,1[$.

Ex 4 : Deux joueurs lancent tour à tour un dé. Le premier qui tire un six a gagné et le jeu s'arrête.
Quelle est la probabilité de gagner pour chacun des joueurs ? Que personne ne gagne ?
Indication : On se ramène à la situation classique modélisée par la donnée de la suite (S_n) définie par :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad S_n : \text{"le nième lancer donne un six"}.$$

On fait comme si le jeu ne s'arrêtait pas pour avoir la propriété :
Les événements de (S_n) sont mutuellement indépendants.

Définition. *(Evénements négligeables, événements presque sûrs)*

Ex 5 : 1) Soit A un événement tel que $P(A) = 0$:

montrer que pour tout événement B, $\quad P(A \cap B) = 0 \quad$ et $\quad P(A \cup B) = P(B)$

2) Soit A un événement tel que $P(A) = 1$:

montrer que pour tout événement B, $\quad P(A \cap B) = P(B) \quad$ et $\quad P(A \cup B) = 1$.

Définition. *(système quasi-complet d'événements)*

Ex 6 : Montrer que :
si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements alors c'est un système quasi-complet événements.

Théorème. *(La formule des probabilités totales avec un système quasi complet).*

Ex 7 : Démontrer ce théorème. (*On utilisera la $\sigma-$additivité et les résultats de l'***Ex 5**).