

Probabilité sur un univers fini.

1.1 Vocabulaire des événements.

1.1.1 Espace probabilisable.

Pour décrire une expérience aléatoire (\mathcal{E}) on commence par choisir un ensemble représentant l'ensemble des résultats de cette expérience.

L'ensemble des résultats possibles est appelé l'**univers** (souvent noté Ω)

Les parties de l'univers sont appelées les **événements**. (noté $\mathcal{P}(\Omega)$)

Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé **espace probabilisable** associé à (\mathcal{E}) .

1.1.2 Vocabulaire et opérations sur les événements.

\bar{A} : l'événement contraire de A , \emptyset : l'événement impossible, Ω : l'événement certain.

Les événements formés d'un élément (les singletons) sont les **événements élémentaires**.

On note parfois (A et B) l'événement $A \cap B$ et (A ou B) l'événement $A \cup B$.

Dire que A et B sont **incompatibles** signifie que $A \cap B = \emptyset$.

Pour ω un résultat et A un événement, " $\omega \in A$ " se dit : " ω réalise A ".

Propriétés :

Soient A , B et C des événements,

$$\emptyset = \Omega \quad \bar{\Omega} = \emptyset \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A \quad A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

$$\bar{\bar{A}} = A \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Complémentaires d'une union et d'une intersection : (Lois de De Morgan)

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Distributivités :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1.1.3 Système complet d'événements.

Définition :

Soient n un entier naturel non nul et A_1, A_2, \dots, A_n des événements.

Dire que (A_1, A_2, \dots, A_n) est un **système complet d'événements** signifie que :

$$\textcircled{1} \quad \bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega \quad \textcircled{2} \quad \underbrace{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset}_{2 \text{ à } 2 \text{ incompatibles}}$$

1.2 Probabilité.

1.2.1 Espace probabilisé.

Définition :

Soit Ω un ensemble fini non vide.

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (ou plus simplement sur Ω), une application \mathbb{P} qui à toute partie de Ω associe un nombre réel et qui vérifie :

❶ $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ ❷ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

❸ Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

1.2.2 Probabilité et opérations sur les événements.

Théorème :

Soit n un entier naturel non nul et A_1, A_2, \dots, A_n des événements de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Si A_1, A_2, \dots, A_n sont deux à deux incompatibles alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

Démonstration.

Proposition : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Démonstration :

Proposition :

$\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(\Omega))^3,$

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Démonstration :

Proposition :

❶ Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

❷ Pour toute liste (A_1, A_2, \dots, A_n) de n événements, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$

Démonstration :

1.2.3 Equiprobabilité.

Définition

Les événements élémentaires sont **equiprobables** signifie qu'ils ont tous la même probabilité.

Théorème :

Soit Ω un univers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans une situation d'equiprobabilité sur Ω on a :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à : $\frac{1}{n}$

- La probabilité d'un événement A est $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Conditionnement et indépendance.

On se place dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

2.1 Probabilité conditionnelle.

2.1.1 Définition.

Définition et proposition :

Soit A un événement de probabilité non nulle.

L'application $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $B \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

L'application \mathbb{P}_A est appelée probabilité sachant A (probabilité conditionnelle relative à A).

2.1.2 Formule des probabilités composées.

Théorème : (*Formule des probabilités composées*)

Pour A_1, \dots, A_n , n événements ($n \geq 2$) vérifiant $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque : La condition $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ entraîne $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) \neq 0$ pour k entre 1 et $n-1$.

2.1.3 Formule des probabilités totales.

Théorème : (*Formule des probabilités totales*)

Soient n un entier naturel non nul et A_1, \dots, A_n n événements de Ω .

❶ Si (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

❷ Si (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements non négligeables pour \mathbb{P} (i.e : pour tout i , $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$) alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Remarque : En prenant la convention suivante : si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ alors $\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B) = 0$ on peut énoncer ❷ plus simplement :

❸ Si (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

2.1.4 Formule de Bayes.

Proposition :

Soient (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements non négligeables pour \mathbb{P} et B un événement également non négligeable pour \mathbb{P} alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

En effet : $\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$

2.2 Événements indépendants.

2.2.1 Indépendance de deux événements.

Définition :

Soient A et B deux événements,

Dire que A et B sont **indépendants** signifie que : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Remarque :

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et A_1, \dots, A_n , n événements de Ω ,

Dire que ces événements sont **2 à 2 indépendants** signifie que

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

2.2.2 Indépendance mutuelle de n événements.

Définition :

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et A_1, \dots, A_n , n événements de Ω ,

Dire que ces événements sont **mutuellement indépendants** signifie que :

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Proposition :

Si n événements sont mutuellement indépendants **alors** ils sont 2 à 2 indépendants.

2.3 Expériences indépendantes.

On considère une expérience aléatoire \mathcal{E} se décomposant en n sous-expériences (ou n épreuves) aléatoires :

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$$

Chacune de ces expériences est modélisée par des espaces probabilisées :

$$(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1), \quad (\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2), \quad \dots, \quad (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$$

On admet que l'on peut modéliser \mathcal{E} par $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ de telle sorte qu'on ait les deux propriétés suivantes :

Propriétés :

Si $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ sont indépendantes, on a alors les propositions suivantes :

❶ si A est un événement de l'expérience \mathcal{E}_i alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_i(A)$.

Pour calculer la probabilité de A on n'observe que l'expérience \mathcal{E}_i

❷ si A_1, A_2, \dots, A_p sont p événements de p expériences distinctes,

alors les événements A_1, A_2, \dots, A_p sont **mutuellement** indépendants.

en particulier :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_p)$$

Remarques :

- Les tirages successifs avec remise sont souvent modélisés ainsi.
- Cette indépendance peut être conditionnée. (*Exemple : une fois le dé choisi, les tirages sont indépendants*).