

## Probabilité sur un univers fini.

### 1.1 Vocabulaire des événements.

#### 1.1.1 Espace probabilisable.

Pour décrire une expérience aléatoire ( $\mathcal{E}$ ) on commence par choisir un ensemble représentant l'ensemble des résultats de cette expérience.

L'ensemble des résultats possibles est appelé l'**univers** (souvent noté  $\Omega$ )  
 Les parties de l'univers sont appelées les **événements**. (noté  $\mathcal{P}(\Omega)$ )  
 Le couple  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  est appelé **espace probabilisable** associé à ( $\mathcal{E}$ ).

#### 1.1.2 Vocabulaire et opérations sur les événements.

$\bar{A}$  : l'événement contraire de  $A$ ,  $\emptyset$  : l'événement impossible,  $\Omega$  : l'événement certain.

Les événements formés d'un élément (les singletons) sont les **événements élémentaires**.

On note parfois ( $A$  et  $B$ ) l'événement  $A \cap B$  et ( $A$  ou  $B$ ) l'événement  $A \cup B$ .

Dire que  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** signifie que  $A \cap B = \emptyset$ .

Pour  $\omega$  un résultat et  $A$  un événement, " $\omega \in A$ " se dit : " $\omega$  réalise  $A$ ".

**Propriétés :**

Soient  $A, B$  et  $C$  des événements,

$$\begin{aligned} \overline{\emptyset} &= \Omega & \overline{\Omega} &= \emptyset & A \cap \emptyset &= \emptyset & A \cup \emptyset &= A & A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A \\ \overline{\bar{A}} &= A & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

Complémentaires d'une union et d'une intersection : (Lois de De Morgan)

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Distributivités :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

#### 1.1.3 Système complet d'événements.

**Définition :**

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements.

Dire que  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  est un **système complet d'événements** signifie que :

$$\textcircled{1} \quad \bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega \quad \textcircled{2} \quad \underbrace{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset}_{2 \text{ à } 2 \text{ incompatibles}}$$

## 1.2 Probabilité.

### 1.2.1 Espace probabilisé.

Définition :

Soit  $\Omega$  un ensemble fini non vide.

On appelle **probabilité** sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  (ou plus simplement sur  $\Omega$ ), une application  $\mathbb{P}$  qui à toute partie de  $\Omega$  associe un nombre réel et qui vérifie :

- ❶  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
- ❷  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- ❸ Pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ , si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

### 1.2.2 Probabilité et opérations sur les événements.

Théorème :

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements de  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ .

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont deux à deux incompatibles alors  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

Démonstration.

Proposition :  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Démonstration :

Proposition :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(\Omega))^3,$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Démonstration :

Proposition :

❶ Pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ , si  $A \subset B$  alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

❷ Pour toute liste  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  de  $n$  événements,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$

Démonstration :

### 1.2.3 Equiprobabilité.

Définition

Les événements élémentaires sont équiprobables signifie qu'ils ont tous la même probabilité.

Théorème :

Soit  $\Omega$  un univers fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Dans une situation d'équiprobabilité sur  $\Omega$  on a :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à :  $\frac{1}{n}$
- La probabilité d'un événement  $A$  est  $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

## Conditionnement et indépendance.

On se place dans  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini.

### 2.1 Probabilité conditionnelle.

#### 2.1.1 Définition.

**Définition et proposition :**

Soit  $A$  un événement de probabilité non nulle.

L'application  $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $B \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$  est une probabilité sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

L'application  $\mathbb{P}_A$  est appelée probabilité sachant  $A$  (probabilité conditionnelle relative à  $A$ ).

#### 2.1.2 Formule des probabilités composées.

**Théorème :** (*Formule des probabilités composées*)

Pour  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  événements ( $n \geq 2$ ) vérifiant  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ , on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

**Remarque :** La condition  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$  entraîne  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) \neq 0$  pour  $k$  entre 1 et  $n-1$ .

#### 2.1.3 Formule des probabilités totales.

**Théorème :** (*Formule des probabilités totales*)

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $A_1, \dots, A_n$   $n$  événements de  $\Omega$ .

❶ Si  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements alors pour tout événement  $B$  on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

❷ Si  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements non négligeables pour  $\mathbb{P}$  (i.e : pour tout  $i$ ,  $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ ) alors pour tout événement  $B$  on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

**Remarque :** En prenant la convention suivante : si  $\mathbb{P}(A_n) = 0$  alors  $\mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(B) = 0$  on peut énoncer ❷ plus simplement :

❷ Si  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements alors pour tout événement  $B$  on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

### 2.1.4 Formule de Bayes.

**Proposition :**

Soient  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements non négligeables pour  $\mathbb{P}$  et  $B$  un événement également non négligeable pour  $\mathbb{P}$  alors pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

**En effet :**  $\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}$

## 2.2 Événements indépendants.

### 2.2.1 Indépendance de deux événements.

**Définition :**

Soient  $A$  et  $B$  deux événements,

Dire que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** signifie que :  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

**Remarque :**

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  événements de  $\Omega$ ,

Dire que ces événements sont **2 à 2 indépendants** signifie que

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

### 2.2.2 Indépendance mutuelle de $n$ événements.

**Définition :**

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  événements de  $\Omega$ ,

Dire que ces événements sont **mutuellement indépendants** signifie que :

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

**Proposition :**

**Si**  $n$  événements sont mutuellement indépendants **alors** ils sont 2 à 2 indépendants.

## 2.3 Expériences indépendantes.

On considère une expérience aléatoire  $\mathcal{E}$  se décomposant en  $n$  sous-expériences (ou  $n$  épreuves) aléatoires :

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$$

Chacune de ces expériences est modélisée par des espaces probabilisés :

$$(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1), \quad (\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2), \quad \dots, \quad (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$$

On admet que l'on peut modéliser  $\mathcal{E}$  par  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  de telle sorte qu'on ait les deux propriétés suivantes :

**Propriétés :**

Si  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  sont indépendantes, on a alors les propositions suivantes :

- ❶ si  $A$  est un événement de l'expérience  $\mathcal{E}_i$  alors  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_i(A)$ .

*Pour calculer la probabilité de  $A$  on n'observe que l'expérience  $\mathcal{E}_i$*

- ❷ si  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sont  $p$  événements de  $p$  expériences distinctes,  
alors les événements  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sont **mutuellement** indépendants.

en particulier :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_p)$$

**Remarques :**

- Les tirages successifs avec remise sont souvent modélisés ainsi.
- Cette indépendance peut être conditionnée. (*Exemple : une fois le dé choisi, les tirages sont indépendants*).