1

Probabilité sur un univers fini.

1.1 Vocabulaire des événements.

1.1.1 Espace probabilisable.

Pour décrire une expérience aléatoire $(\mathscr{E})$ on commence par choisir un ensemble représentant l'ensemble des résultats de cette expérience.

> L'ensemble des résultats possibles est appelé l'**univers** (souvent noté Ω)
> Les parties de l'univers sont appelées les **événements**. (noté $\mathscr{P}(\Omega)$)
> Le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est appelé **espace probabilisable** associé à $(\mathscr{E})$.

1.1.2 Vocabulaire et opérations sur les événements.

$\overline{A}$: l'événement contraire de A, $\varnothing$: l'événement impossible, Ω : l'événement certain.
Les événements formés d'un élément (les singletons) sont les **événements élémentaires**.
On note parfois (A et B) l'événement $A \cap B$ et (A ou B) l'événement $A \cup B$.
Dire que A et B sont **incompatibles** signifie que $A \cap B = \varnothing$.
Pour ω un résultat et A un événement, "$\omega \in A$" se dit : "ω réalise A".

Propriétés :

> Soient A, B et C des événements,
>
> $$\overline{\varnothing} = \Omega \qquad \overline{\Omega} = \varnothing \qquad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
>
> $$\overline{\overline{A}} = A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
>
> Complémentaires d'une union et d'une intersection : (Lois de De Morgan)
>
> $$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
>
> Distributivités :
>
> $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1.1.3 Système complet d'événements.

Définition :

> Soient n un entier naturel non nul et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements.
> Dire que $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un **système complet d'événements** :
>
> ① $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ ② $\underbrace{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing}_{\text{2 à 2 incompatibles}}$

1.2 Probabilité.

1.2.1 Espace probabilisé.

Définition :

Soit Ω un ensemble fini non vide.
On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ (*ou plus simplement sur* Ω), une application $\mathbb{P}$ qui à toute partie de Ω associe un nombre réel et qui vérifie :

❶ $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ ❷ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

❸ Pour tout $(A, B) \in (\mathscr{P}(\Omega))^2$, si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

1.2.2 Probabilité et opérations sur les événements.

Théorème :

Soit n un entier naturel non nul et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles **alors** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Démonstration.

Proposition : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Démonstration :

Proposition :

$\forall (A, B) \in (\mathscr{P}(\Omega))^2, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\forall (A, B, C) \in (\mathscr{P}(\Omega))^3,$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Démonstration :

Proposition :

❶ Pour tout $(A, B) \in (\mathscr{P}(\Omega))^2$, si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

❷ Pour toute liste $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de n événements, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

Démonstration :

1.2.3 Equiprobabilité.

Définition

Les événements élémentaires sont équiprobables signifie qu'ils ont tous la même probabilité.

Théorème :

Soit Ω un univers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans **une situation d'équiprobabilité** sur Ω on a :
- La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à : $\dfrac{1}{n}$
- La probabilité d'un événement A est $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exemples : *Voir la feuille Act_13.*

2

Conditionnement et indépendance.

On se place dans $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

2.1 Probabilité conditionnelle.

2.1.1 Définition.

Définition et proposition :

Soit A un événement de probabilité non nulle.
L'application $\mathbb{P}_A : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui à $B \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$
L'application $\mathbb{P}_A$ est appelée probabilité sachant A (probabilité conditionnelle relative à A).

2.1.2 Formule des probabilités composées.

Théorème : (***Formule des probabilités composées***)

Pour $A_1, \ldots, A_n$, n événements ($n \geqslant 2$) vérifiant $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque : La condition $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ entraîne $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \neq 0$ pour k entre 1 et $n-1$.

2.1.3 Formule des probabilités totales.

Théorème : ***(Formule des probabilités totales)***

Soient n un entier naturel non nul et $A_1, \ldots, A_n$ n événements de Ω.

❶ Si $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

❷ Si $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements non négligeables pour $\mathbb{P}$ (i.e : pour tout i, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$)
alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Remarque : En prenant la convention suivante : si $P(A_n) = 0$ alors $P(A_n)P_{A_n}(B) = 0$ on peut énoncer ❷ plus simplement :

❷ Si $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

2.1.4 Formule de Bayes.

Proposition :

Soient $(A_1,\dots,A_n)$ un système complet d'événements non négligeables pour $\mathbb{P}$ et B un événement également non négligeable pour $\mathbb{P}$ alors pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}_B(A_j)=\frac{\mathbb{P}(A_j)\times\mathbb{P}_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\times\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

En effet : $\mathbb{P}_B(A_j)=\dfrac{P(B\cap A_j)}{P(B)}=\dfrac{P(A_j)\times P_{A_j}(B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_j)\times P_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\times\mathbb{P}_{A_i}(B)}$

2.2 Evénements indépendants.

2.2.1 Indépendance de deux événements.

Définition :

Soient A et B deux événements,

Dire que A et B sont **indépendants** signifie que : $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Remarque :

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1,\dots,A_n$, n événements de Ω,

Dire que que ces événements sont **2 à 2 indépendants** signifie que

$$\forall i,j\in[\![1;n]\!]^2,\quad i\neq j\Longrightarrow\mathbb{P}(A_i\cap A_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

2.2.2 Indépendance mutuelle de n événements.

Définition :

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1,\dots,A_n$, n événements de Ω,

Dire que ces événements sont **mutuellement indépendants** signifie que :

$$\forall J\subset[\![1,n]\!],\quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(A_j)$$

Proposition :

Si n événements sont mutuellement indépendants **alors** ils sont 2 à 2 indépendants.

2.3 Expériences indépendantes.

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ se décomposant en n sous-expériences (ou n épreuves) aléatoires :

$$\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2,\dots,\ \mathcal{E}_n$$

Chacune de ces expériences est modélisée par des espaces probabilisées :

$$(\Omega_1,\mathscr{P}(\Omega_1),\mathbb{P}_1)\ ,\qquad(\Omega_2,\mathscr{P}(\Omega_2),\mathbb{P}_2)\ ,\quad\dots\quad,\quad(\Omega_n,\mathscr{P}(\Omega_n),\mathbb{P}_n)$$

On admet que l'on peut modéliser $\mathcal{E}$ par $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ de telle sorte qu'on ait les deux propriétés suivantes :

Propriétés :

Si $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\ldots$, $\mathcal{E}_n$ sont indépendantes, on a alors les propositions suivantes :

❶ si A est un événement de l'expérience $\mathcal{E}_i$ alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_i(A)$.

Pour calculer la probabilité de A on n'observe que l'expérience $\mathcal{E}_i$

❷ si A_1, A_2 , ..., A_p sont p événements de p expériences distinctes,

alors les événements A_1, A_2 , ..., A_p sont **mutuellement** indépendants.

en particulier :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_p)$$

Remarques :

- Les tirages successifs avec remise sont souvent modélisés ainsi.
- Cette indépendance peut être conditionnée. (*Exemple : une fois le dé choisi, les tirages sont indépendants*).