1

Ensemble des événements et probabilité.

On étudie une expérience aléatoire et on nomme Ω l'ensemble des résultats (l'univers).

1.1 Ensemble des événements.

1.1.1 Notion de tribu.

Soit $\mathscr{T}$ une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$,
dire que $\mathscr{T}$ est une **tribu** sur Ω signifie que :

❶ $\Omega \in \mathscr{T}$ *(Contient l'événement certain)*

❷ $\forall A \in \mathscr{T},\quad \overline{A} \in \mathscr{T}.$ ($\mathscr{T}$ *est stable par passage au complémentaire*).

❸ $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}},\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}.$ ($\mathscr{T}$ *est stable par union dénombrable*).

Remarques :
- Aucune question ne devrait être posée sur cette définition.
- La donnée de $(\Omega, \mathscr{T})$ est appelée : espace probabilisable.
- $\mathscr{T}$ est l'ensemble des événements.
- Un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E.

autrement dit s'il existe une suite (x_n) telle que $\begin{cases} E = \{\ x_n \mid n \in \mathbb{N}\ \} \\ \text{et}\quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j \end{cases}$

Propositions.

Soit $\mathscr{T}$ une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$,
si $\mathscr{T}$ est une **tribu** alors :

❶ $\varnothing \in \mathscr{T}$ *(Contient l'événement impossible).*

❷ $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}},\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}.$ ($\mathscr{T}$ *est stable par intersection dénombrable*).

❸ $\mathscr{T}$ est stable par réunion finie et par intersection finie.

Démonstrations.

Propriétés des intersections et des réunions dénombrables.

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, B un événement et N un entier naturel non nul,

Complémentaire : $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$ $\qquad \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$

Distributivité, $B \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (B \cup A_n)$ $\qquad B \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n).$

Inclusion, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcap_{n=0}^{N} A_n$ $\qquad \bigcup_{n=0}^{N} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$

1.1.2 Système complet d'événements

Définition.

Soit $(A_n)_{n\in I}$ une suite finie ou dénombrable d'événements ($\underbrace{I = [\![1;n]\!]}_{\text{finie}}$ ou $\underbrace{I = \mathbb{N}}_{\text{dénombrable}}$),

Dire que $(A_n)_{n\in I}$ est un système complet d'événements signifie que :

❶ $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ et ❷ $\displaystyle\bigcup_{n\in I} A_n = \Omega$

Remarque : ❶ se dit : (A_n) est une suite d'événements deux à deux disjoints.
ou encore : (A_n) est une suite d'événements deux à deux incompatibles.

1.2 Probabilité.

Définition.

Soient $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable et P une application de $\mathscr{T}$ dans $\mathbb{R}$.
Dire que P est une **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{T})$ signifie que :

❶ $\forall A \in \mathscr{T}, \quad P(A) \in [0,1]$.

❷ $P(\Omega) = 1$

❸ Quel que soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. (*Axiome de σ-additivité*)
si les A_n sont deux à deux incompatibles,
alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge et : $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Remarque : ❸ entraîne : Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

On retrouve donc les mêmes résultats que dans le cours de première année lorsque Ω est fini et $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$:

- n étant fixé dans $\mathbb{N}$, quel que soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite de n événements,
  si les A_k sont deux à deux incompatibles, alors $\displaystyle P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$
- $\forall A \in \mathscr{T}, \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ En effet : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$ donc $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$
- $\forall (A,B) \in \mathscr{T}^2, \quad P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

$$\text{En effet : } \begin{aligned} \mathbb{P}(A\cup B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cup \overline{B}) \\ &= \mathbb{P}(A) - \Big(\mathbb{P}(A\cup B) - \mathbb{P}(B)\Big) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) \end{aligned}$$

- Pour tout $(A,B) \in \mathscr{T}^2$, si $A \subset B$ alors $P(A \setminus B) \leqslant P(B) - P(A)$.
- Pour tout $(A,B) \in \mathscr{T}^2$, si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$. *Démonstration faite au tableau.*
- Quel que soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite de n événements,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

- $\cdots$ *(voir le cours de première année)*

Proposition. *(complément, à savoir redémontrer)*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements,

❶ si $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = 1$ alors : $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$

❷ si $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = 0$ alors : $\displaystyle P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$

Démonstration : *(faite au tableau)*

❶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \subset \bigcap_{k=0}^{n} A_k$ donc $\displaystyle P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leqslant P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$

on a $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leqslant P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = 0$

donc *(passage à la limite)* $\boxed{\displaystyle P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0}$

❷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ donc $\displaystyle P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$

on a $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N},\quad P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leqslant 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = 1$

donc *(passage à la limite)* $\boxed{\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1}$

Proposition.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements,

si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$

Remarques en lien avec le cours sur les séries :

- Si (A_n) est une suite d'événements deux à deux incompatibles, la définition d'une probabilité de première année suffit pour montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge.
- Les séries convergentes sont ici toutes absolument convergentes, l'ordre de sommation n'a pas d'importance, on pourra sans ambigüité, pour $I \subset \mathbb{N}$ utiliser la notation $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)$ pour les sommes.

1.3 Négligeable, presque sûr, quasi-complet.

Définitions.

Soit A un événement,

dire que A est **négligeable** signifie que $P(A) = 0$.

(On dit aussi "quasi-impossible" ou "presque impossible")

dire que A est **presque sûr** signifie que $P(A) = 1$.

(On dit aussi "quasi-certain" ou "presque certain")

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements,

dire que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système **quasi-complet** d'événements signifie que :

❶ $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

❷ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$ *(La série converge et sa somme vaut* 1*)* ou $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$

Propriétés.

Soit A un événement,

❶ Si A est quasi-impossible alors :

pour tout événement B, $P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cup B) = P(B)$

❷ Si A est quasi-certain alors :

pour tout événement B, $P(A \cap B) = P(B)$ et $P(A \cup B) = 1$

Démonstrations :

❶ On suppose $P(A)=0$,

On a $A\cap B\subset A$ donc $0\leqslant P(A\cap B)\leqslant P(A)$ donc $P(A\cap B)=0$

et $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0+P(B)-0$ donc $P(A\cup B)=P(B)$

❷ On suppose $P(A)=1$,

On a $A\subset A\cup B$ donc $P(A)\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1$ donc $P(A\cup B)=1$

et $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(B)$ donc $P(A\cap B)=P(B)$

1.4 Formule des probabilités totales (Version 1)

❶ Si $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements alors pour tout événement B on a :

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k\cap B)$$

❷ Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements alors pour tout événement B on a :

$$\left(\textit{la série } \sum_{n\geqslant 0}P(A_n\cap B) \textit{ est convergente et}\right)\qquad P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(A_n\cap B)$$

Remarques :

- Le théorème est aussi vrai avec un système complet.
- On sait que lorsque une suite d'événements deux à deux incompatibles alors la série $\sum_{n\geqslant 0}P(A_n)$ converge.

  Ce qui permet dans le théorème précédent d'oublier de préciser : $\sum_{n\geqslant 0}P(A_n\cap B)$ est convergente.

Démonstrations : *(Gabin a fait la démonstration au tableau de ❷)*

❶ $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements et B est un événement :

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B\cap\Omega)\\
&= P\left(B\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\right) && \textit{car } (A_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \textit{ est un système complet}\\
&= P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k\cap B)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}P(A_k\cap B) && \textit{car les } (A_k\cap B) \textit{ sont 2 à 2 incompatibles } (\sigma\textit{-additivité}) .
\end{aligned}$$

❷ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements et B est un événement :

$$\begin{aligned}
P(B) &= P\left(B\cap\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_k\right)\right) && \textit{car } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=1 \textit{ (voir la proposition précédente).}\\
&= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(A_n\cap B)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}P(A_n\cap B) && \textit{car les } (A_n\cap B) \textit{ sont 2 à 2 incompatibles. } (\sigma\textit{-additivité})
\end{aligned}$$

2 Conditionnement et indépendance.

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$

2.1 Définition.

Définition.

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$,

On appelle probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$, le réel : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Théorème.

Quel que soit $A \in \mathscr{T}$ tel que $P(A) \neq 0$, l'application P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

Démonstration :

2.2 Formule des probabilités composées

Théorème : (***Formule des probabilités composées***)

Soient n un entier supérieur à 2 et $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste d'événements vérifiant $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration :

2.3 Formule des probabilités totales (Version 2)

Théorème :

❶ Si $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est un système complet d'événements *non négligeables pour* P *(i.e : pour tout* k*,* $P(A_k) \neq 0$*)*

alors pour tout événement B on a : $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \,.\, P_{A_k}(B)$

❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements *non négligeables pour* P *(i.e : pour tout* n*,* $P(A_n) \neq 0$*)*

alors pour tout événement B on a :

$$\left(\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} P(A_n) \,.\, P_{A_n}(B) \text{ est convergente et} \right) \qquad P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \,.\, P_{A_n}(B)$$

Démonstration :

Remarques :

- Ce théorème est encore vrai avec un système complet ou un système quasi-complet d'événements.
- On pourra dans la version ❷ ne pas vérifier $P(A_n) \neq 0$ et quand $P(A_n) = 0$, on pose $P(A_n) \,.\, P_{A_n}(B) = 0$.
- Ici aussi on peut oublier de préciser que la série converge.
- Vous pouvez ne pas ficher "(*non négligeables pour* P *(i.e : pour tout* n*,* $P(A_{\ldots}) \neq 0$*)*)"

2.4 Formule de Bayes

Proposition :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements,

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements (tel que : pour tout n, $P(A_n) \neq 0$)

alors pour tout événement B (tel que $P(B) \neq 0$) et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $P_B(A_k) = \dfrac{P(A_k)\,.\,P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\,.\,P_{A_n}(B)}$

Remarques :

- En pratique il est souvent plus simple de redémontrer cette formule.
- Ce théorème est vrai pour un système complet et pour un système quasi-complet d'événements.
- Ce théorème est vrai avec un système complet d'événements fini. (*Théorème vu en première année*).

2.5 Indépendance

Définition :

Soient A et B deux événements,

Dire que A et B sont **indépendants** signifie que : $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

Propositions :

Soient A et B deux événements,

❶ Si $P(B) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_B(A) = P(A)$.

❷ Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration :

Remarque : Dire que (A_n) est une suite d'événements **2 à 2 indépendants** signifie que

$$\forall (i,j)\in I^2,\quad i\neq j \Longrightarrow P(A_i\cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Définition :

Soit $(A_n)_{n\in I}$ une suite finie ou dénombrable d'événements.

Dire que les A_n sont **mutuellement indépendants** signifie que :

pour toute partie finie J de I, $P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j)$

Autrement dit :

Pour tout entier $k \geqslant 2$, et k indices $i_1 < \cdots < i_k$ on a : $P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\times\cdots\times P(A_{i_k})$.

Remarque : si les A_n sont mutuellement indépendants alors les A_n sont 2 à 2 indépendants, *la réciproque n'est pas toujours vraie.*

Proposition :

Soient $(A_n)_{n\in I}$ une suite finie ou dénombrable d'événements.

et $(B_n)_{n\in I}$ une suite d'événements vérifiant : $\forall n\in I,\ B_n = A_n$ ou $B_n = \overline{A_n}$

❶ Si les A_n sont 2 à 2 indépendants alors les B_n sont 2 à 2 indépendants.

❷ Si les A_n sont mutuellement indépendants alors les B_n sont mutuellement indépendants.

Autrement dit : Si dans une suite d'événements deux à deux (resp. mutuellement) indépendants on remplace un ou plusieurs événements par leur contraire, on obtient toujours une suite d'événements deux à deux (resp. mutuellement) indépendants.

Remarque : Vous pouvez ne pas ficher cette proposition.

3

Variables aléatoires réelles.

On considère ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

3.1 Définition.

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant a]$ est un événement.

Remarques :

- Comme pour les tribus vous ne devriez pas être interrogés sur cette définition.
- On note $[X \leqslant a]$ l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$
- L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $[X \geqslant a]$, $[a \leqslant X \leqslant b]$ sont des événements.

Proposition : Pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, $[X \in I]$ est un événement.

3.2 Fonction de répartition.

Définition

Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,

On appelle fonction de répartition de X la fonction $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array}$

Remarques :

- Quand plusieurs variables aléatoires sont présentes on note $F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array}$
- C'est à rapprocher de la notion de fréquences cumulées en statistiques.

Proposition :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ on a :

$$\mathbb{P}(X \in]a, b]) = F(b) - F(a)$$

Démonstration.

Proposition :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F alors :

❶ F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

❷ F est partout continue à droite.

❸ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Démonstration :

3.3 Indépendance de deux variables aléatoires.

Définition *(définition du programme)*

Soient X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
Dire que X et Y sont indépendantes signifie que :
quel que soit le couple (I, J) d'intervalles de $\mathbb{R}$, $\quad P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I) \times P(Y \in J)$

Proposition *(ou une autre définition)*

Soient X et Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$

3.4 Indépendance de n variables aléatoires.

Définition

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
Dire que les X_k sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :
quelle que soit la liste $(I_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, $\quad P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \in I_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in I_k)$

Proposition *(ou une autre définition)*

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de variables aléatoires sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
Les X_k sont (*mutuellement*) indépendantes si, et seulement si, :
quelle que soit la liste $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de réels , $\quad P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x_k)$

Remarque :
On parle aussi de "liste mutuellement indépendante" *(pour "liste de variables aléatoires mutuellement indépendantes").*

3.5 Indépendance d'une suite de variables aléatoires.

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
Dire que les variables de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :
toute liste finie extraite de la suite est (*mutuellement*) indépendante.

3.6 Propriétés de l'indépendance mutuelle.

Propositions :

Soit $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,

❶ **Si** $X_1, , \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
toute sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$ l'est aussi.

❷ **(*Lemme des coalitions*)**
Soient $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$ deux fonctions,
(*telles que $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires*)
si $X_1, \dots, X_p, \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
$f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

❸ Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, (*telles que $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont des variables aléatoires*)
si $X_1, \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
$f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont (*mutuellement*) indépendantes.

Remarque : Vous pouvez ne pas ficher "(*telles que ... sont des variables aléatoires*) "