

## Table des matières

<b>1 Ensemble des événements et probabilité.</b>	<b>2</b>
1.1 Ensemble des événements. . . . .	2
1.2 Probabilité. . . . .	3
1.3 Négligeable, presque sûr, quasi-complet. . . . .	4
1.4 Formule des probabilités totales (Version 1) . . . . .	5
<b>2 Conditionnement et indépendance.</b>	<b>6</b>
2.1 Définition. . . . .	6
2.2 Formule des probabilités composées . . . . .	6
2.3 Formule des probabilités totales (Version 2) . . . . .	6
2.4 Formule de Bayes . . . . .	7
2.5 Indépendance . . . . .	7
<b>3 Variables aléatoires réelles.</b>	<b>8</b>
3.1 Définition. . . . .	8
3.2 Fonction de répartition. . . . .	8
3.3 Indépendance de deux variables aléatoires. . . . .	9
3.4 Indépendance de $n$ variables aléatoires. . . . .	9
3.5 Indépendance d'une suite de variables aléatoires. . . . .	9
3.6 Propriétés de l'indépendance mutuelle. . . . .	9
<b>4 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire réelle.</b>	<b>10</b>
4.1 Espérance. . . . .	10
4.2 Variance. . . . .	11
4.3 Ecart-type. . . . .	12
4.4 Moments d'ordres supérieurs. . . . .	12
4.5 Avec des variables aléatoires indépendantes. . . . .	12

## Ensemble des événements et probabilité.

On cherche à modéliser une expérience aléatoire, on nomme  $\Omega$  l'ensemble des résultats (l'univers).

### 1.1 Ensemble des événements.

#### 1.1.1 Notion de tribu.

Soit  $\mathcal{T}$  une partie de  $\mathcal{P}(\Omega)$ ,

dire que  $\mathcal{T}$  est une **tribu** sur  $\Omega$  signifie que :

- ❶  $\Omega \in \mathcal{T}$  (Contient l'événement certain)
- ❷  $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} \in \mathcal{T}$ . ( $\mathcal{T}$  est stable par passage au complémentaire).
- ❸  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ . ( $\mathcal{T}$  est stable par union dénombrable).

**Remarques :** • Cette définition ne fera pas l'objet de questions directes, mais elle doit être connue.

- La donnée de  $(\Omega, \mathcal{T})$  est appelée : espace probabilisable.
- $\mathcal{T}$  est l'ensemble des événements.
- Un ensemble  $E$  est dénombrable s'il existe une bijection de  $\mathbb{N}$  dans  $E$ .

autrement dit : s'il existe une suite  $(x_n)$  telle que  $\begin{cases} E = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \} \\ \text{et } \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j \end{cases}$

Avec cette définition les ensembles dénombrables sont infinis. Vous trouverez d'autres définitions.

#### Propositions.

Soit  $\mathcal{T}$  une partie de  $\mathcal{P}(\Omega)$ ,

si  $\mathcal{T}$  est une **tribu** alors :

- ❶  $\emptyset \in \mathcal{T}$  (Contient l'événement impossible).
- ❷  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ . ( $\mathcal{T}$  est stable par intersection dénombrable).
- ❸  $\mathcal{T}$  est stable par réunion finie et par intersection finie.

#### Démonstrations.

## Propriétés des intersections et des réunions dénombrables.

Soient  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements,  $B$  un événement et  $N$  un entier naturel non nul,

$$\text{Complémentaire : } \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \qquad \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$$

$$\text{Distributivité, } B \cup \left( \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (B \cup A_n) \qquad B \cap \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n).$$

$$\text{Inclusion, } \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcap_{n=0}^N A_n \qquad \bigcup_{n=0}^N A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$

### 1.1.2 Système complet d'événements

Définition.

Soit  $(A_n)_{n \in I}$  une suite finie ou dénombrable d'événements ( $I = \llbracket 1; n \rrbracket$  ou  $I = \mathbb{N}$ ),  
finie dénombrable

Dire que  $(A_n)_{n \in I}$  est un système complet d'événements signifie que :

$$\textcircled{1} \quad \forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \textcircled{2} \quad \bigcup_{n \in I} A_n = \Omega$$

Remarque :  $\textcircled{1}$  se dit :  $(A_n)$  est une suite d'événements deux à deux disjoints.

ou encore :  $(A_n)$  est une suite d'événements deux à deux incompatibles.

## 1.2 Probabilité.

Définition.

Soient  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable et  $P$  une application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dire que  $P$  est une **probabilité** sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  signifie que :

- $\textcircled{1} \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(A) \in [0, 1].$
- $\textcircled{2} \quad P(\Omega) = 1$
- $\textcircled{3} \quad$  Quel que soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements. (*Axiome de  $\sigma$ -additivité*)  
 si les  $A_n$  sont deux à deux incompatibles,

$$\text{alors la série } \sum_{n \geq 0} P(A_n) \text{ converge et : } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Remarque :  $\textcircled{3}$  entraîne : Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

On retrouve donc les mêmes résultats que dans le cours de première année lorsque  $\Omega$  est fini et  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  :

- $n$  étant fixé dans  $\mathbb{N}$ , quel que soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  une suite de  $n$  événements,  
 si les  $A_k$  sont deux à deux incompatibles, alors  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$
- $\forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$  En effet :  $A \cup \overline{A} = \Omega$  et  $A \cap \overline{A} = \emptyset$  donc  $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .  
 En effet :  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{F}^2$ , si  $A \subset B$  alors  $P(A \setminus B) = P(B) - P(A)$ .
- Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{F}^2$ , si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$ .  
 En effet :  $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \geq 0$
- Quel que soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  une suite de  $n$  événements,  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$

**Proposition.** (complément, à savoir redémontrer)

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements,

- ❶ si  $\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = 1$  alors :  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$
- ❷ si  $\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right) = 0$  alors :  $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$

**Démonstration :** (faite au tableau)

- ❶ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \subset \bigcap_{k=0}^n A_k$  donc  $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$   
 on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)\right) = 0$

$$\text{donc (passage à la limite)} \quad P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$$

- ❷ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup_{k=0}^n A_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$  donc  $P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$   
 on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)\right) = 1$

$$\text{donc (passage à la limite)} \quad P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$$

**Proposition.**

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements,

- si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements alors :  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$

**Remarques en lien avec le cours sur les séries :**

- Si  $(A_n)$  est une suite d'événements deux à deux incompatibles, la définition d'une probabilité de première année suffit pour montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$  converge.

- Les séries convergentes sont ici toutes absolument convergentes, l'ordre de sommation n'a pas d'importance, on pourra sans ambiguïté, pour  $I \subset \mathbb{N}$  utiliser la notation  $\sum_{i \in I} P(A_i)$  pour les sommes.

### 1.3 Négligeable, presque sûr, quasi-complet.

**Définitions.**

Soit  $A$  un événement,

dire que  $A$  est **négligeable** signifie que  $P(A) = 0$ .

dire que  $A$  est **presque sûr** signifie que  $P(A) = 1$ .

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements,

dire que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système **quasi-complet** d'événements signifie que :

- ❶  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$
- ❷  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$  (La série converge et sa somme vaut 1) ou  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$

**Remarque :** Si un système est complet alors il est quasi-complet. La réciproque n'est pas toujours vraie.

## Propriétés.

Soit  $A$  un événement,

- ❶ Si  $A$  est quasi-impossible alors :

pour tout événement  $B$ ,  $P(A \cap B) = 0$  et  $P(A \cup B) = P(B)$

- ❷ Si  $A$  est quasi-certain alors :

pour tout événement  $B$ ,  $P(A \cap B) = P(B)$  et  $P(A \cup B) = 1$

**Démonstrations :** (*non faites en classe*)

- ❶ On suppose  $P(A) = 0$ ,

On a  $A \cap B \subset A$  donc  $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$  donc  $P(A \cap B) = 0$

et  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0 + P(B) - 0$  donc  $P(A \cup B) = P(B)$

- ❷ On suppose  $P(A) = 1$ ,

On a  $A \subset A \cup B$  donc  $P(A) \leq P(A \cup B) \leq 1$  donc  $P(A \cup B) = 1$

et  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B)$  donc  $P(A \cap B) = P(B)$

## 1.4 Formule des probabilités totales (Version 1)

- ❶ Si  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements alors pour tout événement  $B$  on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k \cap B)$$

- ❷ Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système quasi-complet d'événements alors pour tout événement  $B$  on a :

$$\left( \text{la série } \sum_{n \geq 0} P(A_n \cap B) \text{ est convergente et} \right) \quad P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$$

**Remarques :**

- Le théorème est aussi vrai avec un système complet.

- On sait que lorsque une suite d'événements deux à deux incompatibles alors la série  $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$  converge.

Ce qui permet dans le théorème précédent d'oublier de préciser :  $\sum_{n \geq 0} P(A_n \cap B)$  est convergente.

**Démonstrations :** (*non faites en classe*)

- ❶  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements et  $B$  est un événement :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P\left(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right) && \text{car } (A_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est un système complet} \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap B)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k \cap B) && \text{car les } (A_k \cap B) \text{ sont 2 à 2 incompatibles } (\sigma\text{-additivité}). \end{aligned}$$

- ❷  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système quasi-complet d'événements et  $B$  est un événement :

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(B \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\right) && \text{car } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 \text{ (voir la proposition précédente).} \\ &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) && \text{car les } (A_n \cap B) \text{ sont 2 à 2 incompatibles. } (\sigma\text{-additivité}) \end{aligned}$$

## Conditionnement et indépendance.

On se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

### 2.1 Définition.

**Définition.**

Soient  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $P(A) \neq 0$ ,

On appelle probabilité de  $B$  sachant  $A$ , notée  $P_A(B)$ , le réel :  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

**Théorème.**

Quel que soit  $A \in \mathcal{F}$  tel que  $P(A) \neq 0$ , l'application  $P_A$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Démonstration :**

Il s'agit ici de démontrer que ❶ Pour tout événement  $B$ ,  $0 \leq P_A(B) \leq 1$ , ❷  $P_A(\Omega) = 1$  et ❸ lorsque  $(B_n)$  est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors  $P_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_A(B_n)$

### 2.2 Formule des probabilités composées

**Théorème : (Formule des probabilités composées)**

Soient  $n$  un entier supérieur à 2 et  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste d'événements vérifiant  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ ,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

### 2.3 Formule des probabilités totales (Version 2)

**Théorème :**

❶ Si  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements *non négligeables pour  $P$*  (i.e : pour tout  $k$ ,  $P(A_k) \neq 0$ )

alors pour tout événement  $B$  on a :  $P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P_{A_k}(B)$

❷ Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système quasi-complet d'événements *non négligeables pour  $P$*  (i.e : pour tout  $n$ ,  $P(A_n) \neq 0$ )

alors pour tout événement  $B$  on a :

$$\left( \text{la série } \sum_{n \geq 0} P(A_n) \cdot P_{A_n}(B) \text{ est convergente et} \right) \quad P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)$$

**Démonstration :** (Immédiate à partir de la version 1)

**Remarques :**

- Ce théorème est encore vrai avec un système complet ou un système quasi-complet d'événements.
- On pourra dans la version ❷ ne pas vérifier  $P(A_n) \neq 0$  et quand  $P(A_n) = 0$ , on pose  $P(A_n) \cdot P_{A_n}(B) = 0$ .
- Ici aussi on peut oublier de préciser que la série converge.
- Vous pouvez ne pas ficher " (*non négligeables pour  $P$*  (i.e : pour tout  $n$ ,  $P(A_n) \neq 0$ ) ) "

## 2.4 Formule de Bayes

**Proposition :**

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements,

Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système quasi-complet d'événements ( tel que : pour tout  $n$ ,  $P(A_n) \neq 0$ )

alors pour tout événement  $B$  (tel que  $P(B) \neq 0$ ) et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a :  $P_B(A_k) = \frac{P(A_k) \cdot P_{A_k}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)}$

**Remarques :**

- En pratique il est souvent plus simple de redémontrer cette formule.
- Ce théorème est vrai pour un système complet et pour un système quasi-complet d'événements.
- Ce théorème est vrai avec un système complet d'événements fini. (*Théorème vu en première année*).

## 2.5 Indépendance

**Définition :**

Soient  $A$  et  $B$  deux événements,

Dire que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** signifie que :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

**Propositions :**

Soient  $A$  et  $B$  deux événements,

❶ Si  $P(B) \neq 0$  alors  $A$  et  $B$  sont indépendants si, et seulement si,  $P_B(A) = P(A)$ .

❷ Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants,  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants et  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

**Démonstration :**

**Remarque :** Dire que  $(A_n)$  est une suite d'événements **2 à 2 indépendants** signifie que

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

**Définition :**

Soit  $(A_n)_{n \in I}$  une suite finie ou dénombrable d'événements.

Dire que les  $A_n$  sont **mutuellement indépendants** signifie que :

$$\text{pour toute partie finie } J \text{ de } I, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

**Autrement dit :**

Pour tout entier  $k \geq 2$ , et  $k$  indices  $i_1 < \dots < i_k$  on a :  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k})$ .

**Remarque :** si les  $A_n$  sont mutuellement indépendants alors les  $A_n$  sont 2 à 2 indépendants,

*la réciproque n'est pas toujours vraie.*

**Proposition :**

Soient  $(A_n)_{n \in I}$  une suite finie ou dénombrable d'événements.

et  $(B_n)_{n \in I}$  une suite d'événements vérifiant :  $\forall n \in I, B_n = A_n$  ou  $B_n = \bar{A}_n$

❶ Si les  $A_n$  sont 2 à 2 indépendants alors les  $B_n$  sont 2 à 2 indépendants.

❷ Si les  $A_n$  sont mutuellement indépendants alors les  $B_n$  sont mutuellement indépendants.

**Autrement dit :** Si dans une suite d'événements deux à deux (resp. mutuellement) indépendants on remplace un ou plusieurs événements par leur contraire, on obtient toujours une suite d'événements deux à deux (resp. mutuellement) indépendants.

**Remarque :** Vous pouvez ne pas noter cette proposition.

## Variables aléatoires réelles.

On considère ici un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

### 3.1 Définition.

#### Définition

Une variable aléatoire réelle est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :  
 Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $[X \leq a]$  est un événement.

#### Remarques :

- Comme pour les tribus vous ne devriez pas être interrogés sur cette définition.
- On note  $[X \leq a]$  l'événement  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$
- L'ensemble des valeurs prises par  $X$  est  $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$
- Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $[X \geq a]$ ,  $[a \leq X \leq b]$  sont des événements.

**Proposition :** Pour tout  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $[X \in I]$  est un événement.

### 3.2 Fonction de répartition.

#### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  
 On appelle fonction de répartition de  $X$  la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$   
 $x \mapsto \mathbb{P}([X \leq x])$

#### Remarques :

- Quand plusieurs variables aléatoires sont présentes on note  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$   
 $x \mapsto \mathbb{P}([X \leq x])$
- C'est à rapprocher de la notion de fréquences cumulées en statistiques.

#### Proposition :

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a \leq b$  on a :

$$\mathbb{P}(X \in ]a, b]) = F(b) - F(a)$$

#### Démonstration.

#### Proposition :

Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$  alors :

- ❶  $F$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- ❷  $F$  est partout continue à droite.
- ❸  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

#### Démonstration :

### 3.3 Indépendance de deux variables aléatoires.

**Définition** (*définition du programme*)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  
 Dire que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes signifie que :  
 quel que soit le couple  $(I, J)$  d'intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I) \times P(Y \in J)$

**Théorème** (*caractérisation*)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  
 $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, et seulement si,  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y)$

### 3.4 Indépendance de $n$ variables aléatoires.

**Définition**

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste de variables aléatoires de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  
 Dire que les  $X_k$  sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :  
 quelle que soit la liste  $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$  d'intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \in I_k)\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in I_k)$

**Théorème** (*caractérisation*)

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste de variables aléatoires sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  
 Les  $X_k$  sont (*mutuellement*) indépendantes si, et seulement si, :  
 quelle que soit la liste  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  de réels,  $P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq x_k)\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x_k)$

**Remarque :**

On parle aussi de "liste mutuellement indépendante" (*pour "liste de variables aléatoires mutuellement indépendantes"*).

### 3.5 Indépendance d'une suite de variables aléatoires.

**Définition**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une liste de variables aléatoires de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  
 Dire que les variables de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :  
 toute liste finie extraite de la suite est (*mutuellement*) indépendante.

### 3.6 Propriétés de l'indépendance mutuelle.

**Théorème :**

Soit  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste de variables aléatoires de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,

❶ Si  $X_1, \dots, X_n$  sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**  
 toute sous-famille de  $(X_1, \dots, X_n)$  l'est aussi.

❷ (*Lemme des coalitions*)  
 Soient  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions,  
 si  $X_1, \dots, X_p, \dots, X_n$  sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**  
 $f(X_1, \dots, X_p)$  et  $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

❸ Soient  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  
 si  $X_1, \dots, X_n$  sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**  
 $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  sont (*mutuellement*) indépendantes.

## Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire réelle.

On considère ici un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

### 4.1 Espérance.

#### 4.1.1 Définitions

*Un introduction un peu théorique.*

On admet l'existence d'une fonction  $E$  définie sur une partie de l'ensemble des variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui possèdent les propriétés suivantes :

- ❶  $E(1) = 1$
- ❷ Si  $X$  est à valeurs positives ou nulles et  $X$  admet une espérance alors  $E(X) \geq 0$ .
- ❸ Si  $a$  et  $b$  sont deux réels et  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires possédant une espérance alors  $aX + bY$  admet une espérance et  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

**Remarques :**

- On ne vous posera pas de question sur cette introduction.
- Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance.
- Une variable est dite **centrée** lorsque son espérance est nulle.
- Si  $X$  est une grandeur physique alors  $E(X)$  et  $X$  ont la même dimension.

**Définitions :**

**Situation 1 : Variable discrète finie.**

Toutes les variables aléatoires admettent une espérance :

Pour  $X$  une variable aléatoire avec  $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ ,  $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k)$

**Situation 2 : Variable discrète dénombrable.**

Soit  $X$  un variable aléatoire avec  $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,

$X$  admet une espérance si, et seulement si,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$  est absolument convergente.

et alors  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$

**Situation 3 : Variable à densité.**

Soit  $X$  un variable aléatoire réelle de densité  $f$ ,

$X$  admet une espérance si, et seulement si,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  est absolument convergente.

et alors  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

## 4.1.2 Propriétés.

**Proposition** (*Généralisation de la linéarité*)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste de variables aléatoires sur un même espace probabilisé et  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste de réels.

Si les  $X_k$  possèdent toutes une espérance alors  $\sum_{k=1}^n a_k X_k$  admet une espérance et

$$E\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k E(X_k)$$

**Proposition** (*Croissance de l'espérance*)

$$\text{Si } X \leq Y \quad \text{alors} \quad E(X) \leq E(Y)$$

## 4.1.3 Théorèmes de transfert.

**Théorème.** (*Variable discrète*)

Soient  $X$  une variable aléatoire réelle discrète et  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$ ,

**Dans le cas fini.** on note :  $n$  le cardinal de  $X(\Omega)$  et  $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ ,

$$\text{l'espérance de } f(X) \text{ vérifie : } E(f(X)) = \sum_{k=1}^n f(x_k) P(X = x_k).$$

**Dans le cas dénombrable.** on note :  $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , (avec les  $(x_n)$  2 à 2 distincts)

$f(X)$  admet une espérance si, et seulement si,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) P(X = x_n)$  est absolument convergente.

$$\text{et alors l'espérance de } f(X) \text{ vérifie : } E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) P(X = x_n).$$

**Théorème** (*Variable à densité*)

Soient  $X$  une variable aléatoire réelle de densité  $f$ , telle que  $X$  est à valeurs dans  $]a, b[$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ )

et  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$\varphi(X)$  admet une espérance si, et seulement si,  $\int_a^b \varphi(t) f(t) dt$  est absolument convergente.

$$\text{et alors : } E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f(t) dt$$

## 4.2 Variance.

### 4.2.1 Définition.

**Définition**

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une espérance  $E(X)$ .

Lorsque la variable  $(X - E(X))^2$  admet une espérance on dit que  $X$  admet une variance et on définit sa variance par

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

**Remarques :**

- Si une variable aléatoire  $X$  admet une variance alors nécessairement elle admet une espérance.
- Quelle que soit la variable aléatoire  $X$  admettant une variance, on a :  $V(X) \geq 0$ .
- Si  $V(X) = 0$  alors  $\mathbb{P}([X = m]) = 1$  (où  $m = E(X)$ ), *On dit que  $X$  est une variable quasi-certaine.*
- Dire qu'une variable aléatoire est **réduite** signifie que sa variance est égale à 1.

## 4.2.2 Formule de Kœnig-Huygens.

**Théorème :**

Soit  $X$  est une variable aléatoire réelle,  
Si  $X$  et  $X^2$  admettent une espérance alors  $X$  admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

## 4.2.3 Propriétés.

**Théorème :**

Pour toute variable aléatoire  $X$  admettant une variance et  $a$  et  $b$  deux réels, on a :

$$aX + b \text{ admet une variance et } V(aX + b) = a^2V(X)$$

## 4.3 Ecart-type.

**Définition.**

Quand  $X$  admet une variance, l'écart-type d'une variable aléatoire  $X$  est le réel :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

**Remarque :** Si  $X$  est une grandeur physique alors  $\sigma_X$  et  $X$  ont la même dimension.

**Définition :**

Pour  $X$  une variable aléatoire admettant une variance  $V(X) \neq 0$ ,

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X} \text{ est appelée } \mathbf{variable\ aléatoire\ centré\ réduite} \text{ associée à } X.$$

**Remarque :**  $X^*$  est sans dimension.

## 4.4 Moments d'ordres supérieurs.

**Définition.**

Pour  $X$  une variable aléatoire et  $n$  un entier naturel,

Quand  $X^n$  admet une espérance on appelle  $E(X^n)$  le moment de  $X$  d'ordre  $n$ .

## 4.5 Avec des variables aléatoires indépendantes.

**Théorème :**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,

① Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et admettent des espérances alors

$$XY \text{ admet une espérance et } E(XY) = E(X)E(Y).$$

② Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et admettent des variances alors

$$X + Y \text{ admet une variance et } V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

**Généralisation :**

Soit  $(X_k)_{1 < k \leq n}$  une suite de variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,

① Si les  $X_k$  sont indépendantes et admettent des espérances alors

$$\prod_{k=1}^n X_k \text{ admet une espérance et } E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k)$$

② Si les  $X_k$  sont indépendantes et admettent des variances alors

$$\sum_{k=1}^n X_k \text{ admet une variance et } V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$