Variables aléatoires sur un univers fini.

13 novembre 2024

1 Définitions.

Soient Ω un univers fini et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1.1 Variables aléatoires.

Définition

Les variables aléatoires sur Ω sont les applications de Ω dans $\mathbb{R}$

1.2 Ensemble des valeurs prises.

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

1.3 Variables aléatoires et événements.

Soient B une partie de $\mathbb{R}$, a, b, x des nombres réels,
on peut définir à l'aide d'une variable aléatoire X les événements *(par exemple)* :

$[X \in B] = \{\ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\ \}$ $\qquad$ $[X = a] = \{\ \omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\ \}$ (*les antécédents de a par X*).

1.4 Système complet associé à une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire sur Ω, avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ **avec** $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$.

La famille $(\,[X = x_i]\,)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est **un système complet d'événements**.

1.5 Loi de probabilité.

Définition.

La **loi de probabilité** de X est l'application : $\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X = x]) \end{array}$

1.6 Fonction de répartition.

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω,
On appelle fonction de répartition de X la fonction $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array}$

Proposition :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ on a :

$$\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F(b) - F(a)$$

1.7 Espérance

1.7.1 Définitions.

Définition

Soit X une variable aléatoire.
L'espérance mathématique de X est le réel $\mathbb{E}(X)$ défini par : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}([X = x])$

1.7.2 Linéarité.

Proposition : (linéarité de l'espérance)

X, Y sont deux variables aléatoires sur Ω et a et b deux réels.

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\,\mathbb{E}(X) + b\,\mathbb{E}(Y)$$

1.7.3 Théorème de transfert.

Théorème :

Soient φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (définie sur $X(\Omega)$) et X une variable aléatoire sur Ω,
La variable aléatoire $\varphi(X)$ a pour espérance :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)\ \mathbb{P}([X = x])$$

1.8 Variance.

1.8.1 Définitions.

Définition

La variance d'une variable aléatoire X est le réel $V(X)$ défini par : $V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$

1.8.2 Formule de Kœnig-Huygens.

Proposition :

Pour toute variable aléatoire X sur Ω, on a : $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

1.8.3 Propriétés.

Proposition :

Pour toute variable aléatoire X sur Ω, et pour tous réels a et b, on a : $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

1.8.4 Ecart-type.

L'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Définitions :

- On dit qu'une variable aléatoire est **réduite** lorsque $V(X) = 1$.
- Pour X une variable aléatoire telle que $V(X) \neq 0$,
  $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée **variable aléatoire centré réduite** associée à X.

2

Lois usuelles.

Soient n un entier non nul et X une variable aléatoire de $(\Omega; \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$,

2.1 Loi certaine.

Soit a un nombre réel.
La variable certaine égale à a est la fonction constante $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a \end{array}$

On a : $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}([X = a]) = 1$, $\quad \mathbb{E}(X) = a \qquad V(X) = 0$.

2.2 Loi de Bernoulli.

Définition :

Soit p un réel de $]0, 1[$,
Dire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p \ ; \quad \mathbb{P}([X = 1]) = p \end{cases}$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a : $\quad \mathbb{E}(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Remarque : *(fonction indicatrice)*

Si A est un événement de Ω alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire et $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

Simulation avec une fonction Python :

```
def bernoulli(p):
    return int( random() <= p )
```

2.3 Loi uniforme.

Définition :

Dire que X suit une loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$ signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![1; n]\!] \\ \\ \forall i \in [\![1; n]\!] \ , \quad \mathbb{P}([X = i]) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; n]\!])$ et on redémontre que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n + 1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

Simulation avec une fonction Python :

```
def uniforme_discret(a,b):
    return int((b-a+1)*random())+a
```

2.4 Loi binomiale.

Définition :

Soit p un réel de $]0,1[$,

Dire que X suit une loi binomiale de paramètres (n,p) signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = [\![0;n]\!] \\ \forall k \in [\![0;n]\!]\ ,\ \mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et on a $\mathbb{E}(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Dans quelles situations peut-on observer une loi binomiale ?

Soit $\mathcal{E}$ une expérience constituée de n épreuves **identiques et indépendantes** $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$
(toutes modélisées par $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$) et A un événement de Ω de probabilité $\mathbb{P}(A) = p$.

Si X est la variable aléatoire égale **au nombre de réalisation** de A au cours des n épreuves alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Autre situation.

Proposition : *Somme de n variables de Bernoulli identiques et indépendantes.*

La somme de n variables de Bernoulli de paramètre p (*mutuellement*) indépendantes est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n,p)

Soient n un entier naturel non nuls et p un réel de l'intervalle $]0,1[$

Si $\begin{cases} ① \ X_1, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ ② \ \forall i \in [\![1;n]\!],\quad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ ③ \ X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \end{cases}$, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

Simulation avec une fonction Python :

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```