

Table des matières

| | |
|---|----------|
| 1 Définitions. | 2 |
| 1.1 Variables aléatoires. | 2 |
| 1.2 Ensemble des valeurs prises. | 2 |
| 1.3 Variables aléatoires et événements. | 2 |
| 1.4 Système complet associé à une variable aléatoire. | 2 |
| 1.5 Loi de probabilité. | 2 |
| 1.6 Fonction de répartition. | 2 |
| 1.7 Espérance | 3 |
| 1.7.1 Définition. | 3 |
| 1.7.2 Linéarité. | 3 |
| 1.7.3 Théorème de transfert. | 3 |
| 1.8 Variance. | 3 |
| 1.8.1 Définitions. | 3 |
| 1.8.2 Formule de Kœnig-Huygens. | 3 |
| 1.8.3 Propriétés. | 3 |
| 1.8.4 Ecart-type. | 3 |
| 2 Indépendance | 4 |
| 2.1 Définition | 4 |
| 2.2 Propriété | 4 |
| 2.3 n variables aléatoires | 4 |
| 2.4 Propriétés | 4 |
| 2.5 Espérance de XY et variance de $(X + Y)$ | 4 |
| 3 Lois usuelles. | 5 |
| 3.1 Loi certaine. | 5 |
| 3.2 Loi de Bernoulli. | 5 |
| 3.3 Loi uniforme. | 5 |
| 3.4 Loi binomiale. | 6 |

Définitions.

Soient Ω un univers fini et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

1.1 Variables aléatoires.

Définition

Les variables aléatoires sur Ω sont les applications de Ω dans \mathbb{R}

1.2 Ensemble des valeurs prises.

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

1.3 Variables aléatoires et événements.

Soient B une partie de \mathbb{R} , a, b, x des nombres réels, on peut définir à l'aide d'une variable aléatoire X les événements (*par exemple*) :

$$[X \in B] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \quad [X = a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\} \quad (\text{les antécédents de } a \text{ par } X).$$

1.4 Système complet associé à une variable aléatoire.

Soit X une variable aléatoire sur Ω , avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_r$.

La famille $([X = x_i])_{1 \leq i \leq r}$ est un système complet d'événements.

1.5 Loi de probabilité.

Définition.

La loi de probabilité de X est l'application :

$$\begin{array}{ll} X(\Omega) & \longrightarrow [0, 1] \\ x & \longmapsto \mathbb{P}([X = x]) \end{array}$$

1.6 Fonction de répartition.

Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω ,

On appelle fonction de répartition de X la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$

$$x \longmapsto \mathbb{P}([X \leq x])$$

Proposition :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ on a :

$$\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F(b) - F(a)$$

1.7 Espérance

1.7.1 Définition.

Définition

Soit X une variable aléatoire.

L'espérance mathématique de X est le réel $\mathbb{E}(X)$ défini par :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x])$$

1.7.2 Linéarité.

Théorème : (linéarité de l'espérance)

X, Y sont deux variables aléatoires sur Ω et a et b deux réels.

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

1.7.3 Théorème de transfert.

Théorème :

Soient φ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (définie sur $X(\Omega)$) et X une variable aléatoire sur Ω ,

La variable aléatoire $\varphi(X)$ a pour espérance :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbb{P}([X = x])$$

1.8 Variance.

1.8.1 Définitions.

Définition

La variance d'une variable aléatoire X est le réel $V(X)$ défini par : $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$

1.8.2 Formule de Kœnig-Huygens.

Proposition :

Pour toute variable aléatoire X sur Ω , on a : $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

1.8.3 Propriétés.

Proposition :

Pour toute variable aléatoire X sur Ω , et pour tous réels a et b , on a : $V(aX + b) = a^2V(X)$.

1.8.4 Ecart-type.

L'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Définitions :

• On dit qu'une variable aléatoire est **réduite** lorsque $V(X) = 1$.

• Pour X une variable aléatoire telle que $V(X) \neq 0$,

$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée **variable aléatoire centrée réduite** associée à X .

Indépendance

2.1 Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires,

Dire que X et Y sont indépendantes signifie que :

quel que soit le couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$

2.2 Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires, $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions,

si X, Y sont indépendantes **alors** $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2.3 n variables aléatoires

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une liste de variables aléatoires,

Dire que les X_k sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :

quel que soit la liste $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que $x_k \in X_k(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k)$

2.4 Propriétés

Propositions :

Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$,

❶ Si X_1, \dots, X_n sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

toute sous-famille de (X_1, \dots, X_n) l'est aussi.

❷ (*Lemme des coalitions*)

Soient $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions,

si $X_1, \dots, X_p, \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

$f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

❸ Soit f_1, \dots, f_n des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,

si X_1, \dots, X_n sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**

$f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont (*mutuellement*) indépendantes.

2.5 Espérance de XY et variance de $(X + Y)$

Théorème :

❶ Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

❷ Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors $E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k)$ et $V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$

Lois usuelles.

Soient n un entier non nul et X une variable aléatoire de $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$,

3.1 Loi certaine.

Soit a un nombre réel.

La variable certaine égale à a est la fonction constante $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\omega \longmapsto a$

On a : $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}([X = a]) = 1$, $\mathbb{E}(X) = a$ $V(X) = 0$.

3.2 Loi de Bernoulli.

Définition :

Soit p un réel de $]0, 1[$,

Dire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p ; \quad \mathbb{P}([X = 1]) = p \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a : $\mathbb{E}(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Remarque : (*fonction indicatrice*)

Si A est un événement de Ω alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire et $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

Simulation avec une fonction Python :

```
def bernoulli(p):
    if random() <= p:
        return 1
    return 0
```

3.3 Loi uniforme.

Définition :

Dire que X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \\ \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = i]) = \frac{1}{n} \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ et on redémontre que $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Pour a et b des entiers ($a < b$), $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$ signifie $\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket \\ \forall i \in \llbracket a; b \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = i]) = \frac{1}{b-a+1} \end{cases}$

On a alors : $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Simulation avec une fonction Python de la réalisation de $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$

```
def uniforme_discret(a,b):
    return a + int((b-a+1)*random())
```

3.4 Loi binomiale.

Définition :

Soit p un réel de $]0, 1[$,

Dire que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

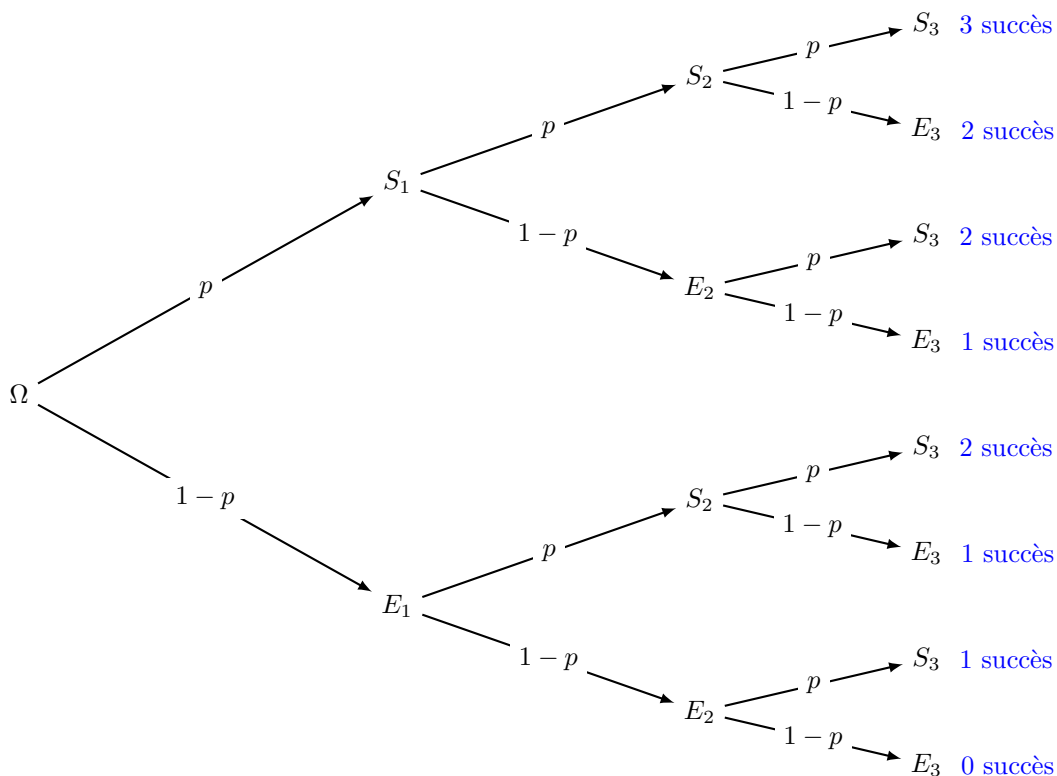
On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et on a $\mathbb{E}(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

Dans quelles situations peut-on observer une loi binomiale ?

Soit \mathcal{E} une expérience constituée de n épreuves **identiques et indépendantes** $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ (toutes modélisées par $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$) et A un événement de Ω de probabilité $\mathbb{P}(A) = p$.

Si X est la variable aléatoire égale **au nombre de réalisation** de A au cours des n épreuves alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Schéma de Bernoulli



Autre situation.

Théorème : Somme de n variables de Bernoulli identiques et indépendantes.

La somme de n variables de Bernoulli de paramètre p (*mutuellement*) indépendantes est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n, p)

Soient n un entier naturel non nuls et p un réel de l'intervalle $]0, 1[$

Si $\begin{cases} \textcircled{1} X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ \textcircled{2} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \\ \textcircled{3} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \end{cases}$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Simulation avec une fonction Python :

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```