Correction du sujet : ENS (2023).

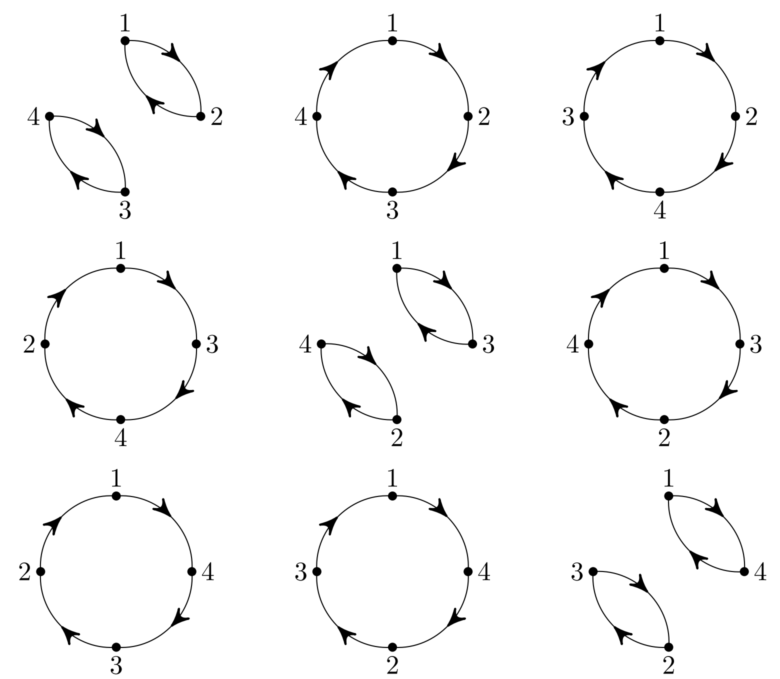
Introduction.

a. On classe tous les dérangements de $[\![1,4]\!]$ dans l'ordre croissant du nombre formé par les 4 chiffres.

i	**1**	**2**	**3**	**4**
$\sigma_1(i)$	2	1	4	3
$\sigma_2(i)$	2	3	4	1
$\sigma_3(i)$	2	4	1	3
$\sigma_4(i)$	3	1	4	2
$\sigma_5(i)$	3	4	1	2
$\sigma_6(i)$	3	4	2	1
$\sigma_7(i)$	4	1	2	3
$\sigma_8(i)$	4	3	1	2
$\sigma_9(i)$	4	3	2	1

$$\boxed{d_4 = 9}$$

Remarque les 9 dérangements de $[\![1,4]\!]$ peuvent aussi être représentés par : *(dans le même ordre)*



b. En notant X_i le résultat de l'étape i, on cherche la probabilité de l'événement :

$$\Big((X_1, X_2, X_3, X_4) \ = \ (3,4,2,1)\Big) = (X_1 = 3) \cap (X_2 = 4) \cap (X_3 = 2)$$

La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}\Big((X_1, X_2, X_3, X_4) \ = \ (3,4,2,1)\Big) = \mathbb{P}(X_1 = 3) \times \mathbb{P}_{(X_1=3)}(X_2 = 4) \times \mathbb{P}_{((X_1,X_2)=(3,4))}(X_3 = 2)$$

La description de la procédure donne ces probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}\Big((X_1, X_2, X_3, X_4) \ = \ (3,4,2,1)\Big) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

En suivant cette procédure, la probabilité d'obtenir le dérangement

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	3	4	2	1

est égale à $\dfrac{1}{12}$.

Si cette procédure était un tirage aléatoire uniforme parmi tous les dérangements de $[\![1,4]\!]$ alors la probabilité d'obtenir chacun d'eux serait égale à $\dfrac{1}{d_4} = \dfrac{1}{9}$, or on a trouvé $\dfrac{1}{12}$ pour un des dérangements.

En conclusion :

Pour $n = 4$, la procédure décrite n'est pas un tirage aléatoire uniforme parmi tous les dérangements de $[\![1,4]\!]$.

Partie I

1.(a) f_n et P_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = f_n(x) + e^x \times \frac{x^n}{n!}\, e^{-x} \qquad \text{et} \qquad P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = P_n(x) - \frac{x^n}{n!}$$

(Remarque pour $n = 0$: $\sum_{k=0}^{-1} ... = 0$)

donc $(P_n + f_n)' = (P_n + f_n)$ *(EDL homogène)*, ce qui entraine que $(P_n + f_n)(x) = (P_n + f_n)(0)\ e^x$

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P_n + f_n)(x) = e^x}$$

(b) Soit $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= e^x \left| \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant e^x \left| \int_0^x \left| \frac{t^n}{n!} e^{-t} \right| \mathrm{d}t \right| && \textit{En effet : } \forall (a,b) \in I^2, \quad \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(t)|\, dt \right| \\
&\leqslant e \max_{t \in [-1,1]} \left(\frac{1}{n!} e^{-t} \right) \left| \int_0^x |t|^n\, \mathrm{d}t \right| && \textit{car } \max_{t \in [-1,1]} \left(e^t \right) = e \\
&\leqslant \frac{e^2}{n!} \left| \int_0^x t^n\, \mathrm{d}t \right| && \textit{En effet : } \underbrace{\left| \int_0^x |t|^n\, dt \right| = \left| \int_0^x t^n\, dt \right|}_{\textit{Il suffit de vérifier pour } x<0 \textit{ et } x>0,\ n \textit{ pair et } n \textit{ impair}} \\
&\leqslant \frac{e^2}{(n+1)!} |x|^{n+1} \\
&\leqslant e^2 |x|^{n+1}
\end{aligned}$$

En posant : $C = e^2$ on a :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad |f_n(x)| \leqslant C|x|^{n+1}}$$

(c) On raisonne par l'absurde et on note k_0 le plus petit indice $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$,

- d'une part, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{Q(x)}{x^{k_0}} &= \frac{1}{x^{k_0}} \sum_{k=k_0}^{N} a_k x^k \\
&= a_{k_0} + \sum_{k=1}^{N-k_0} a_{k_0+k}\, x^k \quad \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \quad a_{k_0} \quad \neq 0
\end{aligned}$$

- d'autre part, pour $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$,

$$|Q(x)| \leqslant C|x|^{n+1} \text{ entraîne que } \frac{|Q(x)|}{|x|^{k_0}} \leqslant C|x|^{n+1-k_0}$$

et comme $n + 1 - k_0 \geqslant 1$ on aurait alors $\lim_{x \to 0} \frac{Q(x)}{x^{k_0}} = 0$ ce qui est impossible.

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = 0}$$

(d) D'après 1.(a) $P_n(x) = e^x - f_n(x)$ et $P_n(-x) = e^{-x} - f_n(-x)$ donc

$$P_n(x)P_n(-x) = 1 - e^x f_n(-x) - e^{-x} f_n(x) + f_n(x) f_n(-x)$$

En notant $Q(x) = -e^x f_n(-x) - e^{-x} f_n(x) + f_n(x) f_n(-x)$ on a un polynôme de degré $N \geqslant n$,

(En effet : $Q(x) = P_n(x)P_n(-x) - 1$)

On note C un constante telle que $\forall x \in [-1, 1], \quad |f_n(x)| \leqslant C|x|^{n+1}$

pour $x \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} |Q(x)| &\leqslant \left|e^x f_n(-x)\right| + \left|e^{-x} f_n(x)\right| + \left|f_n(x) f_n(-x)\right| \\ &\leqslant e\,C|x|^{n+1} + e\,C|x|^{n+1} + C^2|x|^{2n+2} \end{aligned}$$

il existe donc un réel C' tel que : $\forall x \in [-1,1], \quad |Q(x)| \leqslant C'|x|^{n+1}$

On peut alors en déduire avec **1.(c)** qu'il existe un polynôme R_n tel que $Q(x) = x^{n+1}R_n(x)$.

En conclusion :

$$\boxed{\text{il existe un polynôme } R_n \text{ tel que } P_n(x)P_n(-x) = 1 + x^{n+1}R_n(x)}$$

2.(a) Le nombre total de permutations est $\mathrm{card}(S_n) = n!$ et le nombre de dérangements est d_n,

$p_{0,n}$ est la probabilité qu'une permutation tirée uniformément au hasard dans S_n soit un dérangement donc

$$\boxed{p_{0,n} = \frac{d_n}{n!}}$$

(b) Les éléments de $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sont caractérisés par la donnée d'un dérangement de $[\![1,n]\!] \setminus \mathcal{I}$ or le cardinal de $[\![1,n]\!] \setminus \mathcal{I}$ est égal à $n-k$

$$\boxed{\text{Le cardinal de } \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \text{ est égal à } d_{n-k}}$$

(c) On note $S_{k,n}$ l'ensemble des permutations avec exactement k points fixes,

on a :

$$\mathrm{card}(S_{k,n}) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{choix de } \mathcal{I}} \times \underbrace{\mathrm{card}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})}_{\text{nombre de permutations avec } \mathcal{I} \text{ fixe}}$$

ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{card}(S_{k,n})}{n!} = \frac{1}{k!} \times \frac{d_{n-k}}{(n-k)!}$$

on obtient bien :

$$\boxed{p_{k,n} = \frac{1}{k!}\, p_{0,n-k}}$$

$(S_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est un système complet d'événements donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{k,n} = 1$

et $\quad p_{0,n-k} = \dfrac{d_{n-k}}{(n-k)!}$ donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = 1}$$

3.(a)

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P_n(x) D_n(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \times \sum_{j=0}^{n} d_j \frac{x^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \Bigg(\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leqslant i,j \leqslant n}} \frac{d_j}{i!j!} \Bigg)\, x^k \end{aligned}$$

- Pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leqslant i,j \leqslant n}} \frac{d_j}{i!j!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1$$

- Pour $k > n$,

$$0 \leqslant \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leqslant i,j \leqslant n}} \frac{d_j}{i!j!} = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1$$

$$\boxed{\text{Les coefficients de degré } k \text{ de } G_n \text{ valent } 1 \text{ si } k \in [\![0,n]\!] \text{ et appartiennent à } [0,1] \text{ pour } k > n.}$$

(b) D'une part :

$$\begin{aligned} G_n(x)P_n(-x) &= D_n(x)P_n(x)P_n(-x) \\ &= D_n(x)(1+x^{n+1}R_n(x)) \\ &= D_n(x)+x^{n+1}R_n(x)D_n(x) \end{aligned}$$

Donc le coefficient de degré n de $G_n(x)P_n(-x)$ est celui de $D_n(x)$: $\dfrac{d_n}{n!}$

D'autre part :

$$G_n(x)P_n(-x) = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1}T_n(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}x^k\right)$$

Donc le coefficient de degré n de $G_n(x)P_n(-x)$ est égal à $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$

En conclusion :

$$\boxed{\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

(c) $x \in]-1,1[$,

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k \qquad \text{d'après 3.(a) avec } |a_k| \leqslant 1$$

en notant $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ on a : $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k\right| \leqslant u_{2n}(|x|) - u_n(|x|)$

or $(u_n(|x|))$ converge et ainsi $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^k$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

on sait, de plus que $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ converge vers $\dfrac{1}{1-x}$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{1-x}}$

On remarque aussi $P_n(x)$ converge vers e^x *(série exponentielle)*,

et sachant que $G_n(x) = P_n(x)D_n(x)$, on en déduit :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[, \quad \lim_{n\to+\infty} D_n(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}}$$

4.(a) pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, d'après 2.(c) on a :

$$p_{k,n} = \frac{1}{k!}p_{0,n-k} \qquad \text{et} \qquad p_{k-1,n-1} = \frac{1}{(k-1)!}p_{0,n-k}$$

donc

$$\boxed{p_{k,n} = \frac{1}{k}\,p_{k-1,n-1}}$$

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} kp_{k,n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_{k-1,n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Lorsque } n \geqslant 1, \text{ l'espérance de } X_n \text{ est égale à 1.}}$$

(b) Pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} E(X_n(X_n-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X_n=k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)p_{k,n} \\ &= \sum_{k=2}^{n} p_{k-2,n-2} \qquad \textit{(en utilisant le résultat de 4.(a) (deux fois))} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et on sait que $\quad V(X_n) = E(X_n(X_n-1)) + E(X_n) - E(X_n)^2 \quad$ donc

$$\boxed{\text{Lorsque } n \geqslant 2, \text{ la variance de } X_n \text{ est égale à 1.}}$$

5. (a) Les questions 2. et 3. donnent la relation : $p_{0,n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, et on reconnait une série exponentielle donc :

$$\boxed{(p_{0,n}) \text{ converge vers } \quad p_0 = e^{-1}}$$

(b) Pour k un entier fixé, on a $p_{k,n} = \dfrac{1}{k!} p_{0,n-k}$, or $(p_{0,n-k})$ converge vers $\quad e^{-1}$

donc

$$\boxed{(p_{k,n}) \text{ converge vers } \quad p_k = \frac{e^{-1}}{k!}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!} = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \quad e^{-1}\, e^{1}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k \geqslant 0} p_k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1}$$

(c) On reconnait une loi de Poisson.

$$\boxed{\text{La loi de } X \text{ est la loi de Poisson de paramètre 1,} \quad E(X) = 1 \text{ et } V(X) = 1}$$

Partie II

1. (a) Avant la boucle pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\quad \sigma(k) = k$ et à chaque passage dans la boucle on ne modifie que les valeurs de σ de 1 à i, donc $\boxed{\text{juste avant l'échange de valeurs de la ligne 5, } \sigma(k) = k \text{ pour tout } k \in [\![i, n]\!]}$
Au dernier tour de boucle on échange les valeurs en position j_n et n, or à ce moment en $\sigma(n) = n$, et $\varphi = \Phi(j_2, ..., j_n)$ est la valeur de σ après la boucle donc

$$\boxed{\varphi(j_n) = n}$$

Donc $\boxed{j_n \text{ est l'antécédent de } n \text{ par } \varphi}$ $\quad$ *(on peut donc trouver j_n en connaissant φ)*

(b) Au dernier tour de boucle on permute les valeurs en position j_n et n donc

$$\text{Pour tout } k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j_n, n\}, \quad \tilde{\varphi}(k) = \varphi(k) \quad , \quad \tilde{\varphi}(j_n) = \varphi(n) \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(n) = n \quad (= \varphi(j_n)).$$

On peut ainsi déterminer j_{n-1} à partir de φ :

- si $\; j_{n-1} \neq j_n \quad$ alors $\varphi(j_{n-1}) = \tilde{\varphi}(j_{n-1}) = n-1$,

  donc j_{n-1} est l'antécédent de $n-1$ par φ
- si $\; j_{n-1} = j_n \quad$ alors $\varphi(j_{n-1}) = \varphi(j_n) = n$,

  donc j_{n-1} est l'antécédent de n par φ.

(c) L'énoncé nous demande d'admettre que l'on peut obtenir par récurrence que si l'on connait $\varphi = \Phi(j_2, \ldots, j_n)$, alors on peut déterminer toutes les valeurs $j_2, \ldots, j_n$, donc

$$\boxed{\text{l'application } \Phi : [\![1,2]\!] \times [\![1,3]\!] \times \ldots \times [\![1,n]\!] \to S_n \text{ est injective}}$$

On sait de plus que le cardinal de $[\![1,2]\!] \times [\![1,3]\!] \times \ldots \times [\![1,n]\!]$ vaut $n!$ donc est égal à celui de S_n.

$$\boxed{\text{l'application } \Phi : [\![1,2]\!] \times [\![1,3]\!] \times \ldots \times [\![1,n]\!] \to S_n \text{ est bijective}}$$

(d) Soit $\varphi \in S_n$ et $(j_2, ..., j_n)$ l'unique antécédent de φ par Φ *(d'après 1.(c))*.
L'événement $\Phi(J_2, ..., J_n) = \varphi$ est égal à : $\quad (J_2 = j_2) \cap \cdots \cap (J_n = j_n)$,
or J_k suit la loi uniforme sur $[\![1,k]\!]$ et les J_k sont indépendantes donc la probabilité de l'événement $\Phi(J_2, ..., J_n) = \varphi$ est égale à : $\dfrac{1}{n!}$
donc toutes les permutations peuvent être renvoyées et avec la même probabilité.

$\boxed{\texttt{PermAlea(n)} \text{ renvoie une permutation tirée uniformément au hasard dans } S_n}$

On peut remarquer que dans cet algorithme qu'il y a $n-1$ appels à la fonction `Unif`.

2. On appel succès : "La fonction `PermAlea` donne un dérangement".

(a) $(Z_n \geqslant k)$ est réalisé si, et seulement si, les $k-1$ premiers appels à la fonction `PermAlea` donne un échec comme les appels sont indépendants on obtient : $\boxed{\mathbb{P}(Z_n \geqslant k) = (1 - p_{0,n})^{k-1}}$

de plus $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (Z_n = \infty) \subset (Z_n \geqslant k), \qquad$ donc $0 \leqslant P(Z_n = \infty) \leqslant (1 - p_{0,n})^{k-1}$

on sait aussi que $p_{0,n} \in]0,1[$ donc on peut en déduire, par passage à la limite, que $\boxed{P(Z_n = \infty) = 0}$

On retrouve un schéma usuel de la loi géométrique :

Z_n est le rang du premier succès au cours d'une succession indéfinie d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

$$\boxed{Z_n \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p_{0,n} \text{ et son espérance est } E(Z_n) = \frac{1}{p_{0,n}}}$$

(b) A chaque appel de `PermAlea` on fait $n-1$ appels à la fonction `Unif` donc

$$\begin{aligned} u_n &= E((n-1)Z_n) \\ &= (n-1)E(Z_n) \\ &= (n-1)\frac{1}{p_{0,n}} \\ &\sim \frac{n}{p_0} \qquad \textit{car} \quad n-1 \sim n \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} p_{0,n} = p_0 \neq 0 \end{aligned}$$

donc $\qquad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{p_0}}$

(c) On note A : "Obtenir le dérangement φ" et A_k : "Obtenir le dérangement φ exactement au $k^{\text{ième}}$ appel" de sorte que :

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

L'indépendance des appels donne :

$$P(A_k) = (1 - p_{0,n})^{k-1} \times \frac{1}{n!}$$

et les événements de cette réunion sont deux à deux incompatibles donc

$$P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_{0,n})^{k-1} \times \frac{1}{n!} = \frac{1}{p_{0,n}} \times \frac{1}{n!}$$

et comme $p_{0,n} = \dfrac{d_n}{n!}$ il vient $P(A) = \dfrac{1}{d_n}$ et ainsi :

$\boxed{\texttt{PermAleaRejet(n)} \text{ renvoie un dérangement tiré uniformément au hasard dans } S_{0,n}}$

Partie III

1.(a) Le nombre de ces permutations est égal au nombre de permutations de $[\![1,n]\!]\backslash\{a_1,...,a_\ell\}$ qui est un ensemble de cardinal $n-\ell$.

$$\boxed{\text{Il y a } (n-\ell)! \text{ permutations de } S_n \text{ tels que } C_{a_1,\ldots,a_\ell} \text{ soit réalisé.}}$$

(b) $\text{card}(L_1=\ell) = \underbrace{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-\ell+1)!}}_{\text{choix de l'arrangement } (a_2,\ldots a_\ell)} \times \underbrace{(n-\ell)!}_{\text{Choix d'une permutation avec } C_{a_1,\ldots,a_\ell}}$

Donc $\quad P(L_1=\ell) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$ ce qui donne bien : $\boxed{P(L_1=\ell) = \dfrac{1}{n}}$

Pour $\ell = 1$, $\quad (L_1=\ell)$ est l'ensemble des permutations qui laissent fixe 1 donc $\text{card}(L_1=1) = (n-1)!$,

on retrouve bien : $\boxed{P(L_1=\ell) = \dfrac{1}{n}}$

$$\boxed{\text{Pour tout } \ell \in [\![1,n]\!], \quad P(L_1=\ell) = \frac{1}{n}}$$

(c) Si $C_{a_1,\ldots,a_\ell}$ est réalisée alors on retrouve dans la même situation que la question 1.(b) mais sur $[\![1,n]\!] \backslash \{a_1,...,a_\ell\}$ qui est un ensemble de cardinal $n-\ell$ et en prenant $a_{\ell+1}$ au lieu de a_1,
on peut donc en déduire que :

$$\boxed{\text{Pour tout } \tilde{\ell} \in [\![1,n-\ell]\!], \quad P_{C_{a_1,\ldots,a_\ell}}(L_2=\tilde{\ell}) = \frac{1}{n-\ell}}$$

2.(a) Soit $k \geqslant 1$,

$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[k,k+1]$ donc $\boxed{\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leqslant \dfrac{1}{k}}$

on en déduit : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$

En sommant pour k allant de 1 à n, puis pour k allant de 2 à n il vient :

(Relation de Chasles et somme télescopique).

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1+\ln(n)}$$

(b) $(H_n=1) = (Y_n=[n])$ est l'événement : "le premier appel à `Unif` donne n" qui a pour probabilité $\dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{P(H_n=1) = \frac{1}{n}}$$

Pour $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
(H_n=k) &= \bigcup_{\substack{1\leqslant \ell_1,\ldots,\ell_k \leqslant n \\ \ell_1+\cdots+\ell_k=n}} \big(Y_n = (\ell_1,\ldots,\ell_k)\big) \\
&= \bigcup_{\substack{1\leqslant \ell_1,\ldots,\ell_k \leqslant n \\ \ell_1+\cdots+\ell_k=n}} (U_n=\ell_1) \cap \big(Y_{n-\ell_1} = (\ell_2,\ldots,\ell_k)\big)
\end{aligned}$$

Les événements de cette union sont deux à deux disjoints donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_n=k) &= \sum_{\substack{1\leqslant \ell_1,\ldots,\ell_k \leqslant n \\ \ell_1+\cdots+\ell_k=n}} \mathbb{P}\Big((U_n=\ell_1) \cap \big(Y_{n-\ell_1} = (\ell_2,\ldots,\ell_k)\big)\Big) \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant \ell_1,\ldots,\ell_k \leqslant n \\ \ell_1+\cdots+\ell_k=n}} \mathbb{P}\big(U_n=\ell_1\big) \times \mathbb{P}\Big(Y_{n-\ell_1} = \big(\ell_2,\ldots,\ell_k\big)\Big) \qquad \text{Indépendance de } U_n \text{ et } Y_k
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_n = k) &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leqslant \ell_1, \dots, \ell_k \leqslant n \\ \ell_1 + \dots + \ell_k = n}} \mathbb{P}\Big(Y_{n-\ell_1} = \big(\ell_2, \dots, \ell_k\big)\Big) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\ell_1=1}^{n-1} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant \ell_2, \dots, \ell_k \leqslant n-\ell_1 \\ \ell_2 + \dots + \ell_k = n-\ell_1}} \mathbb{P}\Big(Y_{n-\ell_1} = \big(\ell_2, \dots, \ell_k\big)\Big) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\ell_1=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_{n-\ell_1} = k-1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}\left(H_n = k\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\mathbb{P}\left(H_{n-\ell} = k-1\right)}{n}}$$

(c)

$$\begin{aligned}
E(H_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, \mathbb{P}(H_n = k) \\
&= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{+\infty} k\, \mathbb{P}(H_n = k) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{+\infty} k\, \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1) \qquad \textit{(d'après 2.(b))} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)\, \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} E(H_{n-\ell} + 1) \qquad \textit{(théorème de transfert)}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{E(H_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} E(H_{n-\ell})}$$

$$\begin{aligned}
E(H_{n+1}) &= 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n} E(H_{n+1-\ell}) \\
&= 1 + \frac{1}{n+1} \left(E(H_n) + \sum_{\ell=1}^{n-1} E(H_{n-\ell}) \right) \\
&= 1 + \frac{1}{n+1} \left(E(H_n) + n(E(H_n) - 1) \right) \\
&= E(H_n) + \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(H_{n+1}) - E(H_n) = \frac{1}{n+1}}$$

Or $E(H_1) = 1$ donc : $\boxed{E(H_n) = h_n}$ avec h_n défini à la question 2.(a).

de plus on a montré que : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$ ce qui entraîne que $h_n \sim \ln(n)$ et ainsi :

$$\boxed{E(H_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3. (a) *Il faut surement lire : "H_n est la taille de la liste renvoyée par la fonction* **LongueursCyclesAlea(n)** *à la ligne 2 de l'algorithme 5 quand on effectue l'appel de la fonction* **LongueursCyclesAleaRejet(n)**".
Il semble y avoir une erreur d'énoncé, il faut inverser F_n et F_n^c

On note A : "A la ligne 2 on obtient une liste de longueur t sans 1"

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n = t) &= \mathbb{P}(A) \ + \ \mathbb{P}((T_n = t) \cap \overline{A}) \\
&= \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap (T_n = t)) \\
&= \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n \cap (T_n = t)) \\
&= \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \mathbb{P}_{(H_n=s)\cap F_n}(T_n = t) \\
&= \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n)\, \mathbb{P}(T_n = t - s)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n = t) = \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \ \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n)\, \mathbb{P}(T_n = t - s)}$$

(b) *On admet l'existence de toutes les séries ci-dessous.*

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{t=1}^{+\infty} t\, \mathbb{P}(T_n = t) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t\, \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \ \sum_{t=1}^{+\infty} t \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n)\, \mathbb{P}(T_n = t - s) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t\, \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \ \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{t=s+1}^{+\infty} t\mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n)\, \mathbb{P}(T_n = t - s) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t\, \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \ \sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \sum_{t=1}^{+\infty} (t + s)\mathbb{P}(T_n = t) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t\, \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \ \sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n)\, (E(T_n) + s) \\
&= \sum_{t=1}^{+\infty} t\, \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n^c) \ + \ \sum_{s=1}^{+\infty} s\mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n) \quad + \quad \mathbb{P}(F_n)E(T_n) \\
&= E(H_n) + \quad \mathbb{P}(F_n)E(T_n)
\end{aligned}$$

donc $\quad E(T_n) = \dfrac{E(H_n)}{1 - \mathbb{P}(F_n)}$

or $\quad 1 - \mathbb{P}(F_n) = P(F_n^c) = p_{0,n} \quad$ *(la probabilité que la liste ne contienne pas de 1)*

donc

$$\boxed{E(T_n) = \frac{h_n}{p_{0,n}} \ \textit{(erreur d'énoncé ?)}}$$

Remarque : Voir en annexe de cette correction un programme permettant de conforter cette conclusion par des séries de simulations.

(c) *Question non traitée, nous ne faisons que $v_n \sim n$.*
Lorsqu'on appelle `PermAleaCycles(LongueursCycleAleaRejet(n))`, on appelle T_n fois la fonction `Unif()` en exécutant `LongueursCycleAleaRejet(n)` puis on on appelle $n-1$ fois la fonction `Unif()` en exécutant `PermAleaCycles(n)`

Le nombre d'appels moyen est donc $v_n = E(T_n) + n - 1 = \dfrac{h_n}{p_0, n} + n - 1,$

On sait de plus que $h_n \sim \ln(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_0, n = p_0 > 0$

On a bien :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

Partie IV

1. Dans la première méthode le nombre moyen d'appels à `Unif` est $u_n \sim \dfrac{n}{p_0}$ *(d'après II 2.(b))*

Dans la deuxième méthode le nombre moyen d'appels à `Unif` est $v_n \sim n$ *(d'après III 3.(c))*

$p_0 < 1$ donc

$$\boxed{\text{En moyenne, l'algorithme de III fait asymptotiquement moins d'appels à la fonction } \texttt{Unif} \text{ que celui du II}}$$

2. La fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $k \geqslant 2$, $\ln(k) \geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(x)\,\mathrm{d}x$

en sommant on obtient : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et comme $\ln(1) = 0$ on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x}$$

or $\displaystyle\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(x) - x\Big]_1^n$ ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant n\ln(n) - n + 1}$$

3.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{n!}\right) &= n(1-\varepsilon)\ln(n) - \ln(n!) \\
&= n(1-\varepsilon)\ln(n) - \sum_{k=2}^{n}\ln(k) \\
&\leqslant n(1-\varepsilon)\ln(n) - n\ln(n) + n - 1 \qquad \textit{(d'après IV 2.)} \\
&\leqslant -\varepsilon\, n\ln(n)\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\ln(n)} + \frac{1}{\varepsilon\, n\ln(n)}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty
\end{aligned}$$

donc *(en passant à l'exponentielle)* il vient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{(1-\varepsilon)n}}{n!} = 0}$

or $d_n = p_{0,n}.n!$ donc $d_n \sim p_0\, n!$ et ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{(1-\varepsilon)n}}{d_n} = 0$ et :

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand } n^{(1-\varepsilon)n} < d_n}$$

Il manque la conclusion.

```python
from math import factorial
import random as rd

COMPTE = 0

def Unif(n):
    global COMPTE
    COMPTE += 1
    return rd.randint(1, n)

def PermAlea(n):
    L= [k for k in range(1, n+1)]
    for i in range(1,n):
        j = Unif(i-1)
        L[i], L[j] = L[j], L[i]
    return L

def LongueursCycleAlea(n):
    l = Unif(n)
    if l == n:
        return [n]
    return [l] + LongueursCycleAlea(n-l)

def LongueursCycleAleaRejet(n):
    L = LongueursCycleAlea(n)
    while 1 in L:
        L = LongueursCycleAlea(n)
    return L

def calcul_p_0(n):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S += (-1)**k/factorial(k)
    return S

def calcul_h(n):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S += 1/k
    return S

def PermAleaCycles(L):
    n = sum(L)
    k = len(L)
    m = 0
    a = PermAlea(n)
    S = [0 for k in range(n)]
    for j in range(1, k+1):
        for i in range(m+1, m+L[j-1]):
            S[a[i-1]-1] = a[i]
        S[a[m+L[j-1]-1]-1] = a[m]
        m = m + L[j-1]
    return S

# Etude de la question III 3.
n= 10
N = 10000   #   Nombre de simulations.
for k in range(N):
    LongueursCycleAleaRejet(n)
print("Nombre moyen d'appels de Unif() par des simulations : ",  COMPTE/N)
print("Calcul de l'expression hn/p_0,n : ", calcul_h(n)/(calcul_p_0(n)))
print("Cela semble confirmer l'erreur d'énoncé")
```