1 Variables aléatoires discrètes.

On considère un espace probabilisé $(\Omega;\mathscr{T},\mathbb{P})$ quelconque.

1.1 Définition

Définition.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega;\mathscr{T},\mathbb{P})$
Dire que X est une variable aléatoire discrète signifie que $X(\Omega)$ est un ensemble de réels fini ou dénombrable.

Remarques :

• Lorsque X est une variable aléatoire discrète, on note $X(\Omega)=\{\ x_i \mid i\in I\ \}$ avec $\overbrace{I=[\![1;n]\!]}^{\text{fini}}$ ou $\overbrace{I=\mathbb{N}}^{\text{dénombrable}}$
(et $\forall (i,j)\in I^2,\quad i\neq j \Longrightarrow x_i\neq x_j$)

• *Extrait du programme* : Une variable aléatoire est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est inclus dans un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathbb{R}$ indexé par une partie de $\mathbb{N}$.

• *Comment bien définir une variable aléatoire ?*

En pratique 1 : On nous donne $X(\Omega)=\{\ x_i\mid i\in I\ \}$ et $P(X=x_i)=p_i$

Vérifier si X est bien définie revient à :

❶ Vérifier que les x_i sont 2 à 2 distincts. ❷ que $\forall i\in I,\ p_i\geqslant 0$ ❸ et que $\sum_{i\in I}$ vaut 1.

Exemples : Feuille Cours_5

Proposition.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum p_n$ converge et a pour somme 1 , alors il existe une variable aléatoire réelle discrète X sur $(\Omega;\mathscr{T},\mathbb{P})$ vérifiant $P(X=x_n)=p_n$ pour tout entier naturel n.

En pratique 2 : *(On décrit une expérience aléatoire)*

On décrit une expérience aléatoire avec Ω quelconque. On note E la partie de Ω où X n'est pas définie.

X est une variable aléatoire bien définie lorsque $P(E)=0$.

Dans ce cas là on confond Ω et $\Omega\setminus E$

Exemples : Feuille Cours_5

• *Extrait du programme* : On tolère qu'une variable aléatoire issue d'une expérience aléatoire puisse ne pas être définie sur un événement de probabilité nulle.

1.2 Système complet d'événements associé à X

Théorème.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega;\mathscr{T},\mathbb{P})$
Si X est une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega)=\{\ x_i\mid i\in I\ \}$ (avec $i\neq j\Longrightarrow x_i\neq x_j$)
alors $([X=x_i])_{i\in I}$ est un système *quasi*-complet d'événements.

1.3 Loi de probabilité

Définition.

Soit X est une variable aléatoire discrète.
L'application $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X=x) \end{array}$ est appelée **loi de probabilité** de X.

Définition. *Loi conditionnelle.*

Soit X est une variable aléatoire discrète et A un événement de probabilité non nulle.
L'application $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_A(X=x) \end{array}$ est appelée **loi de probabilité de X sachant A** .

1.4 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle discrète.

1.4.1 Espérance

Définition *(Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.)*

• Lorsque $X(\Omega)$ est fini, en notant $n = \text{card}(X(\Omega))$ et $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![1;n]\!]\}$

on appelle espérance mathématique de X le réel : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, P(X = x_k)$

• Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, en notant $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (avec les (x_n) 2 à 2 distincts),

X admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

alors l'espérance mathématique de X est le réel : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X = x_n)$

En pratique.

• *Cas fini.*

"$X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, P(X = x_k)$"

• *Cas dénombrable.*

❶ " X admet une espérance si et seulement si, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente."

On montre que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |x_n| P(X = x_n)$ est convergente et on dit que X admet une espérance.

❷ On calcule l'espérance $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X = x_n)$

Exemples : Feuille Cours_5

Remarques :

• La convergence absolue est nécessaire pour que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X = x_n)$ ne dépende pas du choix des (x_n) pour décrire $X(\Omega)$

• Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance. (Exemple : feuille Cours_5)

• Une variable aléatoire est dite **centrée** lorsque son espérance est nulle.

Théorème : *(linéarité)*

Soient X et Y deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,
Si X et Y admettent chacune une espérance alors
pour tout réel a et b, $aX + bY$ admet une espérance et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Proposition : *(Croissance)*

Soient X et Y deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,

❶ Si $X \geqslant 0$ et X admet une espérance alors $E(X) \geqslant 0$.

❷ Si $X \leqslant Y$ et si X et Y admettent chacune une espérance alors $E(X) \leqslant E(Y)$

En effet :

Généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de variables aléatoires sur un même espace probabilisé et $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de réels.

Si les X_k possèdent toutes une espérance alors $\quad E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$

En effet :

1.4.2 Théorème de transfert.

Théorème. *(Théorème de transfert)*

Soient X une variable aléatoire réelle discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$,

Dans le cas fini. on note : n le cardinal de $X(\Omega)$ et $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![1;n]\!]\ \}$,

l'espérance de $f(X)$ vérifie : $E(f(X)) \ = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, P(X = x_k)$.

Dans le cas dénombrable. on note : $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$, (avec les (x_n) 2 à 2 distincts)

$f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente.

et alors l'espérance de $f(X)$ vérifie : $E(f(X)) \ = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\, P(X = x_n)$.

Rédaction.

- *Cas fini.*

  $X(\Omega)$ est fini et f est définie sur $X(\Omega)$ donc *(théorème de transfert)* $f(X)$ admet une espérance

  et $E(f(X)) \ = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, P(X = x_k)$

- *Cas dénombrable.*

  ❶ *(f est définie sur $X(\Omega)$)*

  ❷ $f(X)$ admet une espérance si et seulement si, $\sum_{n \geqslant 0} f(x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente.

  On montre que : $\sum_{n \geqslant 0} |f(x_n)| P(X = x_n)$ est convergente et on dit que $f(X)$ admet une espérance.

  ❸ On calcule l'espérance $E(f(X)) \ = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\, P(X = x_n)$

Exemples : feuille Cours_5

Remarque : X peut admettre une espérance alors que $f(X)$ non.

En effet :

1.4.3 Variance d'une variable aléatoire discrète.

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète.
Dire que X admet une variance signifie que X et $(X - E(X))^2$ admettent une espérance.
on définit alors sa variance par : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

Remarques :

- Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas de variance.
- Dire qu'une variable aléatoire est **réduite** signifie que sa variance est égale à 1.

1.4.4 Formule de Kœnig-Huygens.

Lemme. *(Exercice)*

Soit X une variable aléatoire discrète,
Si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance.

Démonstration. *(Voir feuille cours_5_2)*

Théorème : *(Formule de Kœnig-Huygens).*

Soit X est une variable aléatoire discrète,
X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance
et alors
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Démonstration. *Faite au tableau.*

Rédaction.

Cas fini.

"$X(\Omega)$ est fini donc X admet une variance et $E(X) = \cdots$, $E(X^2) = \cdots$, et ainsi $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$"

Cas dénombrable.

❶ " X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X = x_n)$ est absolument convergente."

On montre que : $\sum\limits_{n\geqslant 0} |x_n^2| P(X = x_n)$ est convergente et on dit que X admet une variance.

❷ On calcule les deux espérances $E(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X = x_n)$ et $E(X^2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n^2\, P(X = x_n)$

❸ On applique le théorème de Koenig-Huygens : X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Exemples : Feuille Cours_5_2

1.4.5 Propriétés de la variance.

Proposition :

Quelle que soit la variable aléatoire X admettant une variance,
① $V(X) \geqslant 0$.

② Si $V(X) = 0$ alors $\mathbb{P}([X = m]) = 1$ (où $m = E(X)$),
On dit que X est une variable quasi-certaine.

③ Pour toute variable X admettant une variance et a et b deux réels, on a :

$$aX + b \quad \text{admet une variance et} \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Démonstrations.

1.4.6 Moments d'ordre supérieurs.

Définition :

Pour X une variable aléatoire et n un entier naturel,
Quand X^n admet une espérance on appelle $E(X^n)$ le moment de X d'ordre n.

1.4.7 Ecart-type.

Définition :

Quand X admet une variance, l'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel : $\sqrt{V(X)}$

On note souvent : $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ou $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$,

d'où la notation $V(X) = \sigma^2$

Définition :

Pour X une variable aléatoire admettant une variance $V(X) \neq 0$,
$X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée **variable aléatoire centré réduite** associée à X.

Démonstration.

2 Indépendance.

2.1 Caractérisations.

Revoir la définition générale de l'indépendance.

Caractérisation. ***Indépendance de deux variables aléatoires discrètes.***

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes,
Dire que X et Y sont indépendantes signifie que :
quel que soit le couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)) = \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)$

Caractérisation. ***Indépendance de n variables aléatoires discrètes.***

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste *(finie)* de variables aléatoires discrètes,
Dire que les X_k sont *(mutuellement)* indépendantes signifie que :
quel que soit la liste de réels $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$

2.2 Indépendance d'une suite de variables aléatoires.

(Déja vu dans le chapitre Probabilité).

Définition

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
Dire que les variables de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :
toute liste finie extraite de la suite est (*mutuellement*) indépendante.

2.3 Propriétés de l'indépendance mutuelle

(Déja vu dans le chapitre Probabilité).

Théorème :

Soit $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,

❶ **Si** $X_1, , \ldots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
toute sous-famille de $(X_1, \ldots, X_n)$ l'est aussi.

❷ (***Lemme des coalitions***)
Soient $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$ deux fonctions,
si $X_1, \ldots, X_p, \ldots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
$f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

❸ Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
si $X_1, \ldots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
$f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont (*mutuellement*) indépendantes.

2.4 Théorèmes.

Théorème :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

❶ Si X et Y sont indépendantes et admettent des espérances alors

XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

❷ Si X et Y sont indépendantes et admettent des variances alors

$X + Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

On admet ❶ car il nous manque un théorème hors-programme, mais en admettant ❶ on peut démontrer ❷ .

Démonstration de ❷ :

Généralisation :

Soit $(X_k)_{1<k\leqslant n}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

❶ Si les X_k sont indépendantes et admettent des espérances alors

$$\prod_{k=1}^{n} X_k \text{ admet une espérance et } E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

❷ Si les X_k sont indépendantes et admettent des variances alors

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ admet une variance et } V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

Démonstration :

2.5 Stabilité des lois de Poisson.

Proposition.

Soient λ_1, λ_2 deux réels non nuls et X_1 et X_2 deux variables aléatoires *(sur le même espace probablisé)*,

$$\text{Si } \begin{cases} X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)\ ,\ \ X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2) \\ \text{et } X_1, X_2 \text{ sont indépendantes} \end{cases} \quad \text{alors } X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Démonstration : *Voir feuille Cours_5_4*

Généralisation .

Soient $(X_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de variables aléatoires, $(\lambda_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de réels non nuls,

(sur le même espace probablisé)

on note : $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $\lambda = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \lambda_k$.

Si les X_k sont mutuellement indépendantes et si $\forall k \in \mathbb{N},\ X_k \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_k)$ alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

Démonstration : *Voir feuille Cours_5_4*

2.6 Complément.

Théorème

Soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille d'événements,

Les événements A_k sont mutuellement indépendants

si, et seulement si, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_k}$ sont indépendantes.

3 Lois finies usuelles.

3.1 Loi certaine.

Soit a un nombre réel.
Dire que X est la variable certaine égale à a signifie que X est la fonction constante $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a \end{array}$

On a : $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}([X = a]) = 1$, $\mathbb{E}(X) = a$ $V(X) = 0$.

Remarque : Dire que X est "quasi-certaine égale à a" signifie que $\mathbb{P}([X = a]) = 1$

3.2 Loi de Bernoulli.

Définition :

Soit p un réel de $]0, 1[$,
dire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p \\ \mathbb{P}([X = 1]) = p \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a : $\mathbb{E}(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Remarque : Si A est un événement de Ω alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire et $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

Simulation avec une fonction Python :

```
def bernoulli(p):
    if rd.random() <= p :
        return 1
    return 0
```

3.3 Loi uniforme.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$,
Dire que X suit une loi uniforme sur $[\![a; b]\!]$ signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = [\![a; b]\!] \\ \forall i \in [\![a; b]\!] \ , \quad \mathbb{P}([X = i]) = \dfrac{1}{b - a + 1} \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a; b]\!])$, (Attention : Ne pas confondre avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$)

Proposition :

si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a; b]\!])$ alors $E(X) = \dfrac{a + b}{2}$

Démonstration. *(A savoir faire)*

Remarque : *Savoir retrouver la variance (Voir la feuille Cours_5_2)* $V(X) = \dfrac{(b - a)(b - a + 2))}{12}$

Simulation avec une fonction Python (sans `randint`) :

```
def uniforme(a, b):
    return floor( a+ (b-a+1)*rd.random() )            # floor importé de math
```

Remarque : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$ alors $\begin{cases} \forall x < 1, \quad F_X(x) = 0 \\ \forall x \in [1,n], \quad F_X(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \\ \forall x > n, \quad F_X(x) = 1 \end{cases}$

3.4 Loi binomiale.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un réel de $]0,1[$, X une variable aléatoire,
Dire que X suit une loi binomiale de paramètres (n,p) signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![0;n]\!] \\ \forall k \in [\![0;n]\!]\ , \quad \mathbb{P}([X=k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et on a $\mathbb{E}(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ *(démonstrations dans la feuille_5_2)*

Dans quelle situation peut-on observer une loi binomiale ?

Si une expérience est constituée de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et si X désigne le nombre de succès alors X suit la loi binomiale de paramètres (n,p) où p est la probabilité du succès.

Remarque : On se retrouve dans cette situation lors d'un tirage successif avec remise.

Simulation avec une fonction Python :

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```

Proposition : *Somme de n variables de Bernoulli identiques et indépendantes.*

La somme de n variables de Bernoulli de paramètre p (*mutuellement*) indépendantes est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n,p)

Soient n un entier naturel non nuls et p un réel de l'intervalle $]0,1[$

Si $\begin{cases} ① \ X_1, \dots, X_n \ \text{ sont indépendantes} \\ ② \ \forall i \in [\![1;n]\!], \quad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ ③ \ X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \end{cases}$, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

Stabilité de la loi binomiale. *(Complément)*

Soients X_1 et X_2 deux variables aléatoires, n_1, n_2 deux entiers naturels non nuls et p un réel de $]0,1[$
Si X_1 et X_2 sont indépendantes et si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1,p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2,p)$
alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1+n_2\ ,\ p)$$

Généralisation .

Soient $(X_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de variables aléatoires, $(n_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste d'entiers naturels non nuls et p un réel de $]0,1[$, on note : $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} n_k$.
Si les X_k sont mutuellement indépendantes et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n_k,p)$ alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

4 Lois discrètes infinies usuelles.

4.1 Lois géométriques

4.1.1 Définition

Soient X une variable aléatoire réelle et p un réel de $]0,1[$,
Dire que X suit une loi géométrique de paramètre p signifie :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = (1-p)^{n-1}\,p$$

Remarques :
- On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
- En notant $q = 1-p$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = q^{n-1}\,p$

Situation type. *(Rédaction)*
"Cette expérience est la succession d'un nombre indéfini d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succès est .... la probabilité du succès vaut p,
X est le rang du premier succès donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$."

4.1.2 Fonction de répartition.

Description.

Soit F la fonction de répartition d'une variable X suivant une loi géométrique de paramètre p,
❶ Pour tout $n < 1$, $\quad F(n) = 0$
❷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F est constante sur $[n; n+1[$ et $F(n) = 1 - q^n$

Remarques : *(Feuille Cours_5_3)*
- La démonstration *(à refaire)* est le calcul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}\,p = 1 - q^n$,

  mais pour le retrouver il est plus simple de remarquer :

  $[X > n]$: "avoir des échecs au cours des n premières épreuves", donc $P(X > n) = q^n$

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \leqslant n) = 1 - q^n$ et $P(X > n) = q^n$

4.1.3 Espérance et variance.

Proposition.

Soit X un variable aléatoire réelle,
si X suit une loi géométrique de paramètre p alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration. *(Feuille Cours_5_3)*

4.1.4 Loi sans mémoire.

Proposition

> Soient X une variable aléatoire réelle et p un réel de $]0,1[$,
> si X suit une loi géométrique de paramètre p alors
> $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \quad P\Big([X = n+k] \,\big|\, [X > k] \Big) = P(\,[X = n]\,)$$

Démonstration. *(Feuille Cours_5_3)*

Remarques : *(interprétation)*

- En se plaçant dans la situation type : $[X > k]$: " Pas de succès pendant les k premiers lancers "
  on observe les n prochains lancers le rang du premier succès suit la loi $\mathcal{G}(p)$
- Si on n'observe l'expérience de 1 à k et qu'il n'y a pas eu de succès alors la loi du temps d'attente du premier succès est la même qu'au début.
- Encore une autre interprétation :
  On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $Y = X - n$,
  Sachant $(X > n)$ *("il n'y a eu que des échecs du rang 1 au rang n")*,
  Y est alors le temps d'attente du premier succès à partir du rang $n+1$,
  La proposition a montré que : la loi conditionnelle sachant $(X > n)$ de Y est la loi $\mathscr{G}(p)$
- Certains préfèrent la proposition suivante : *(nous la retrouverons avec la loi exponentielle)*
  $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \quad P\Big([X > n+k] \,\big|\, [X > k] \Big) = P(\,[X > n]\,)$$

4.1.5 Simulation numérique.

Simulation avec une fonction Python :

```
def geometrique(p):
    x = 1
    while rd.random() > p :
        x += 1
    return x
```

4.2 Loi de Poisson

4.2.1 Définition

Définition.

> Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,
> Dire que X suit une loi de Poisson de paramètre λ signifie que :
> $$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Remarques :

- on note : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$
- Siméon Denis Poisson (1781-1840)
- Ne pas oublier de préciser que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ au début de cette définition.
- Savoir vérifier rapidement que c'est bien une loi de probabilité .

4.2.2 Espérance et variance.

Proposition.

> Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,
> Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors, admet une espérance et une variance et
> $$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$

Démonstration : *feuille_Cours_5_3*

4.2.3 Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson.

Proposition.

Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

En posant $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$ on obtient :

$$\binom{n}{k} p_n^k\ (1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Démonstration : *feuille_Cours_5_3*

Approximation

Quand $n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0{,}1$ on peut approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$

4.2.4 Simulation numérique.

Approximation

Quand $n \geqslant 30$ et $\dfrac{\lambda}{n} \leqslant 0{,}1$ on peut approcher par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$

Remarque : $n \geqslant 30$ et $\dfrac{\lambda}{n} \leqslant 0{,}1$ équivaut à $n \geqslant \max(30, 10\lambda)$

Simulation avec une fonction Python :

```
def loi_poisson(lbd):           # attention lambda est un mot réservé du langage Python
    n = int(max(10*lbd, 30))    # on choisit n pour avoir n >= 30 et p <= 0.1
    p = lbd/n
    return binomiale(n, p)
```

Il existe aussi `rd.poisson(lbd)` du module `random`.