

Variables aléatoires discrètes.

On considère un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{F}, \mathbb{P})$ quelconque.

1.1 Définition

Définition.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega; \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Dire que X est une variable aléatoire discrète signifie que $X(\Omega)$ est un ensemble de réels fini ou dénombrable.

Remarques :

- Lorsque X est une variable aléatoire discrète, on note $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec $I = \overbrace{[1; n]}^{\text{fini}}$ ou $I = \overbrace{\mathbb{N}}^{\text{dénombrable}}$
(et $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j$)
- *Extrait du programme* : Une variable aléatoire est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est inclus dans un sous-ensemble \mathcal{N} de \mathbb{R} indexé par une partie de \mathbb{N} .
- *Comment bien définir une variable aléatoire ?*

En pratique 1 : On nous donne $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et $P(X = x_i) = p_i$

Vérifier si X est bien définie revient à :

- ❶ Vérifier que les x_i sont 2 à 2 distincts. ❷ que $\forall i \in I, p_i \geq 0$ ❸ et que $\sum_{i \in I} p_i$ vaut 1.

Exemples : Ex 2. de la feuille Cours.5

Proposition.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum p_n$ converge et a pour somme 1, alors il existe une variable aléatoire réelle discrète X sur $(\Omega; \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifiant $P(X = x_n) = p_n$ pour tout entier naturel n .

En pratique 2 : (On décrit une expérience aléatoire)

On décrit une expérience aléatoire avec Ω quelconque. On note E la partie de Ω où X n'est pas définie.

X est une variable aléatoire bien définie lorsque $P(E) = 0$.

Dans ce cas là on confond Ω et $\Omega \setminus E$

Exemples : Ex 3. de la feuille Cours.5

- *Extrait du programme* : On tolère qu'une variable aléatoire issue d'une expérience aléatoire puisse ne pas être définie sur un événement de probabilité nulle.

1.2 Système complet d'événements associé à X

Théorème.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega; \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Si X est une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ (avec $i \neq j \implies x_i \neq x_j$)
alors $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système quasi-complet d'événements.

Démonstration. (avortée au tableau)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega \setminus E$ avec $P(E) = 0$.

on suppose : $X(\Omega \setminus E) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (dans l'énoncé du théorème on confond $X(\Omega \setminus E)$ et $X(\Omega)$)

1.3 Loi de probabilité

Définition.

Soit X est une variable aléatoire discrète.

L'application $X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée **loi de probabilité** de X .
 $x \longmapsto \mathbb{P}(X = x)$

Définition. *Loi conditionnelle.*

Soit X est une variable aléatoire discrète et A un événement de probabilité non nulle.

L'application $X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée **loi de probabilité de X sachant A** .
 $x \longmapsto \mathbb{P}_A(X = x)$

1.4 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle discrète.

1.4.1 Espérance

Définition (*Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.*)

- Lorsque $X(\Omega)$ est fini, en notant $n = \text{card}(X(\Omega))$ et $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$
on appelle espérance mathématique de X le réel : $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$
- Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, en notant $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (avec les (x_n) 2 à 2 distincts),
 X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.
alors l'espérance mathématique de X est le réel : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$

En pratique.

- *Cas fini.*

" $X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$ "

- *Cas dénombrable.*

❶ " X admet une espérance si et seulement si, $\sum_{n \geq 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente."

On montre que : $\sum_{n \geq 0} |x_n| P(X = x_n)$ est convergente.

❷ On calcule la somme $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$

Exemples : Ex 4. de la feuille Cours.5

Remarques :

- La convergence absolue est nécessaire pour que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépende pas du choix des (x_n) pour décrire $X(\Omega)$
- Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance. (Ex 4. de la feuille Cours.5)
- Une variable aléatoire est dite **centrée** lorsque son espérance est nulle.

Théorème : (*linéarité*)

Soient X et Y deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,
 Si X et Y admettent chacune une espérance alors
 pour tout réel a et b , $aX + bY$ admet une espérance et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Proposition : (*Croissance*)

Soient X et Y deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,
 ❶ Si $X \geq 0$ et X admet une espérance alors $E(X) \geq 0$.
 ❷ Si $X \leq Y$ et si X et Y admettent chacune une espérance alors $E(X) \leq E(Y)$

En effet :

Généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une liste de variables aléatoires sur un même espace probabilisé
 et $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ une liste de réels.
 Si les X_k possèdent toutes une espérance alors $E\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k E(X_k)$

En effet :

1.4.2 Théorème de transfert.

Théorème. (*Théorème de transfert*)

Soient X une variable aléatoire réelle discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$,
Dans le cas fini. on note : n le cardinal de $X(\Omega)$ et $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$,
 l'espérance de $f(X)$ vérifie : $E(f(X)) = \sum_{k=1}^n f(x_k) P(X = x_k)$.
Dans le cas dénombrable. on note : $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, (avec les (x_n) 2 à 2 distincts)
 $f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente.
 et alors l'espérance de $f(X)$ vérifie : $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) P(X = x_n)$.

Rédaction.

- *Cas fini.*

$X(\Omega)$ est fini et f est définie sur $X(\Omega)$ donc (*théorème de transfert*) $f(X)$ admet une espérance

et $E(f(X)) = \sum_{k=1}^n f(x_k) P(X = x_k)$

- *Cas dénombrable.*

❶ (f est définie sur $X(\Omega)$)

❷ $f(X)$ admet une espérance si et seulement si, $\sum_{n \geq 0} f(x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente.

On montre que : $\sum_{n \geq 0} |f(x_n)| P(X = x_n)$ est convergente.

❸ On calcule la somme $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) P(X = x_n)$

Exemples : Ex 6. de la feuille Cours_5

Remarque : X peut admettre une espérance alors que $f(X)$ non.

En effet :

1.4.3 Variance d'une variable aléatoire discrète.

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète.

Dire que X admet une variance signifie que X et $(X - E(X))^2$ admettent une espérance.

on définit alors sa variance par : $V(X) = E((X - E(X))^2)$

Remarques :

- Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas de variance.
- Dire qu'une variable aléatoire est **réduite** signifie que sa variance est égale à 1.

1.4.4 Formule de Kœnig-Huygens.

Lemme. (Exercice)

Soit X une variable aléatoire discrète,

Si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance.

Démonstration. (Voir feuille cours_5_ter)

Théorème : (Formule de Kœnig-Huygens).

Soit X est une variable aléatoire discrète,

X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance

et alors

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Démonstration. Faite au tableau.

Rédaction.

Cas fini.

" $X(\Omega)$ est fini donc X admet une variance et $E(X) = \dots$, $E(X^2) = \dots$, et ainsi $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ "

Cas dénombrable.

❶ " X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geq 0} x_n^2 P(X = x_n)$ est absolument convergente."

On montre que : $\sum_{n \geq 0} |x_n^2| P(X = x_n)$ est convergente.

❷ On calcule la somme $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 P(X = x_n)$

❸ On applique le théorème de Kœnig-Huygens : X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Exemples : Feuille Cours_5_ter

1.4.5 Propriétés de la variance.

Proposition :

Quelle que soit la variable aléatoire X admettant une variance,

① $V(X) \geq 0$.

② Si $V(X) = 0$ alors $\mathbb{P}([X = m]) = 1$ (où $m = E(X)$),

On dit que X est une variable quasi-certaine.

③ Pour toute variable X admettant une variance et a et b deux réels, on a :

$$aX + b \text{ admet une variance et } V(aX + b) = a^2V(X)$$

Démonstrations.

1.4.6 Moments d'ordre supérieurs.

Définition :

Pour X une variable aléatoire et n un entier naturel,

Quand X^n admet une espérance on appelle $E(X^n)$ le moment de X d'ordre n .

1.4.7 Ecart-type.

Définition :

Quand X admet une variance, l'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel : $\sqrt{V(X)}$

On note souvent : $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ou $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$,

d'où la notation $V(X) = \sigma^2$

Définition :

Pour X une variable aléatoire admettant une variance $V(X) \neq 0$,

$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée **variable aléatoire centré réduite** associée à X .

Démonstration.

Lois finies usuelles.

2.1 Loi certaine.

Soit a un nombre réel.

Dire que X est la variable certaine égale à a signifie que X est la fonction constante $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $\omega \mapsto a$

On a : $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}([X = a]) = 1$, $\mathbb{E}(X) = a$ $V(X) = 0$.

Remarque : Dire que X est "quasi-certaine égale à a " signifie que $\mathbb{P}([X = a]) = 1$

2.2 Loi de Bernoulli.

Définition :

Soit p un réel de $]0, 1[$,

dire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p \\ \mathbb{P}([X = 1]) = p \end{cases}$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a : $\mathbb{E}(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Remarque : Si A est un événement de Ω alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire et $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

Simulation avec une fonction Python :

```
def bernoulli(p):
    if random() <= p :
        return 1
    return 0
```

2.3 Loi uniforme.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leq b$,

Dire que X suit une loi uniforme sur $[[a; b]]$ signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = [[a; b]] \\ \forall i \in [[a; b]] , \mathbb{P}([X = i]) = \frac{1}{b - a + 1} \end{cases}$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, (Attention : Ne pas confondre avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$)

Proposition :

$$\text{si } X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b]) \quad \text{alors} \quad E(X) = \frac{a + b}{2}$$

Démonstration. (*A savoir faire*)

Remarque : *Savoir retrouver la variance (Voir la feuille Cours_5_ter)* $V(X) = \frac{(b - a)(b - a + 2)}{12}$

Simulation avec une fonction Python (sans randint) : (feuille info 6)

```
def uniforme(a, b):
    return floor( a+ (b-a+1)*rd.random() ) # floor importé de math
```

Remarque : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ alors
$$\begin{cases} \forall x < 1, & F_X(x) = 0 \\ \forall x \in [1, n], & F_X(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \\ \forall x > n, & F_X(x) = 1 \end{cases}$$

2.4 Loi binomiale.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un réel de $]0, 1[$, X une variable aléatoire,
Dire que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et on a $\mathbb{E}(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ (démonstrations faites dans la feuille_5_ter)

Dans quelle situation peut-on observer une loi binomiale ?

Si une expérience est constituée de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et si X désigne le nombre de succès alors X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) où p est la probabilité du succès.

Remarque : On se retrouve dans cette situation lors d'un tirage successif avec remise.

Simulation avec une fonction Python :

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```

Proposition : Somme de n variables de Bernoulli identiques et indépendantes.

La somme de n variables de Bernoulli de paramètre p (mutuellement) indépendantes est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n, p)

Soient n un entier naturel non nuls et p un réel de l'intervalle $]0, 1[$

Si $\begin{cases} \textcircled{1} X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ \textcircled{2} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \\ \textcircled{3} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \end{cases}$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Stabilité de la loi binomiale. (Complément)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, n_1, n_2 deux entiers naturels non nuls et p un réel de $]0, 1[$

Si X_1 et X_2 sont indépendantes et si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$
alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

Généralisation .

Soient $(X_k)_{1 < k \leq N}$ une liste de variables aléatoires, $(n_k)_{1 < k \leq N}$ une liste d'entiers naturels non nuls et

p un réel de $]0, 1[$, on note : $X = \sum_{k=1}^N X_k$ et $n = \sum_{k=1}^N n_k$.

Si les X_k sont mutuellement indépendantes et si $\forall k \in \mathbb{N}, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Lois discrètes infinies usuelles.

3.1 Lois géométriques

3.1.1 Définition

Soient X une variable aléatoire réelle et p un réel de $]0, 1[$,
Dire que X suit une loi géométrique de paramètre p signifie :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

Remarques :

- On note $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- En notant $q = 1 - p$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = q^{n-1} p$

Situation type. (*Rédaction*)

”Cette expérience est la succession d’un nombre indéfini d’épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succès est la probabilité du succès vaut p ,

X est le rang du premier succès donc $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$.”

3.1.2 Fonction de répartition.

Description.

Soit F la fonction de répartition d’une variable X suivant une loi géométrique de paramètre p ,

- ❶ Pour tout $n < 1$, $F(n) = 0$
- ❷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F est constante sur $[n; n + 1[$ et $F(n) = 1 - q^n$

Remarques : (*Feuille Cours_5_bis*)

- La démonstration (*à refaire*) est le calcul : $\sum_{k=1}^n q^{k-1} p = 1 - q^n$,

mais pour le retrouver il est plus simple de remarquer :

$[X > n]$: ”avoir des échecs au cours des n premières épreuves”, donc $P(X > n) = q^n$

- Si $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \leq n) = 1 - q^n$ et $P(X > n) = q^n$

3.1.3 Espérance et variance.

Proposition.

Soit X un variable aléatoire réelle,
si X suit une loi géométrique de paramètre p alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration. (*Feuille Cours_5_bis*)

3.1.4 Loi sans mémoire.

Proposition

Soient X une variable aléatoire réelle et p un réel de $]0, 1[$,
si X suit une loi géométrique de paramètre p alors

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad P([X = n + k] | [X > k]) = P([X = n])$$

Démonstration. (*Feuille Cours_5_bis*)

Remarques : (*interprétation*)

- En se plaçant dans la situation type : $[X > k]$: " Pas de succès pendant les k premiers lancers " on observe les n prochains lancers le rang du prochain succès suit la loi $\mathcal{G}(p)$
- Si on n'observe l'expérience de 1 à k et qu'il n'y a pas eu de succès alors la loi du temps d'attente du prochain succès est la même qu'au début.
- Encore une autre interprétation :
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $Y = X - n$,
Sachant $(X > n)$ ("il n'y a eu que des échecs du rang 1 au rang n "),
 Y est alors le temps d'attente du premier succès à partir du rang $n + 1$,
La proposition a montré que : la loi conditionnelle sachant $(X > n)$ de Y est la loi $\mathcal{G}(p)$
- Certains préfèrent la proposition suivante : (*nous la retrouverons avec la loi exponentielle*)

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad P([X > n + k] | [X > k]) = P([X > n])$$

3.1.5 Simulation numérique.

Simulation avec une fonction Python :

```
def geometrique(p):  
    x = 1  
    while random() > p :  
        x += 1  
    return x
```

3.2 Loi de Poisson

3.2.1 Définition

Définition.

Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,
Dire que X suit une loi de Poisson de paramètre λ signifie que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Remarques :

- on note : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
- Siméon Denis Poisson (1781-1840)
- Ne pas oublier de préciser que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ au début de cette définition.
- Savoir vérifier rapidement que c'est bien une loi de probabilité .

3.2.2 Espérance et variance.

Proposition.

Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,
Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors, admet une espérance et une variance et
 $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

Démonstration : *feuille_Cours_5_bis*

3.2.3 Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson.

Proposition.

Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,
 Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

En posant $p_n = \frac{\lambda}{n}$ on obtient :

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Démonstration : *feuille_Cours_5_bis*

Approximation

Quand $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$ on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$

3.2.4 Simulation numérique.

Approximation

Quand $n \geq 30$ et $\frac{\lambda}{n} \leq 0,1$ on peut approcher par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

Remarque : $n \geq 30$ et $\frac{\lambda}{n} \leq 0,1$ équivaut à $n \geq \max(30, 10\lambda)$

Simulation avec une fonction Python :

```
def loi_poisson(lbd):          # attention lambda est un mot réservé du langage Python
    n = int(max(100*lbd, 100)) # on choisit n pour avoir n >= 100 et p <= 0.01
    return binomiale(n, lbd/n)
```

Il existe aussi `rd.poisson(lbd)` du module `random`.

3.2.5 Stabilité des lois de Poisson.

Proposition.

Soient λ_1, λ_2 deux réels non nuls et X_1 et X_2 deux variables aléatoires,
 Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et X_1, X_2 sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Démonstration :

Généralisation .

Soient $(X_k)_{1 < k \leq N}$ une liste de variables aléatoires, $(\lambda_k)_{1 < k \leq N}$ une liste de réels non nuls,
 on note : $X = \sum_{k=1}^N X_k$ et $\lambda = \sum_{k=1}^N \lambda_k$.
 Si les X_k sont mutuellement indépendantes et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Indépendance.

Définition. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes,

Dire que X et Y sont indépendantes signifie que :

quel que soit le couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$

Définition. Indépendance de n variables aléatoires discrètes.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une liste (*finie*) de variables aléatoires discrètes,

Dire que les X_k sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :

quel que soit la liste $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que $x_k \in X_k(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k)$

Théorème :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

❶ Si X et Y sont indépendantes et admettent des espérances alors

XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

❷ Si X et Y sont indépendantes et admettent des variances alors

$X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

On admet ❶ car il nous manque un théorème hors-programme, mais en admettant ❶ on peut démontrer ❷ .

Démonstration de ❷ :

Généralisation :

Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

❶ Si les X_k sont indépendantes et admettent des espérances alors

$\prod_{k=1}^n X_k$ admet une espérance et $E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k)$

❷ Si les X_k sont indépendantes et admettent des variances alors

$\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance et $V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$