# Table des matières

# 1 Variables aléatoires discrètes.

On considère un espace probabilisé $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$ quelconque.

## 1.1 Définition

**Définition.**

Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$

Dire que $X$ est une variable aléatoire discrète signifie que $X(\Omega)$ est un ensemble de réels fini ou dénombrable.

**Remarques :**

• Lorsque $X$ est une variable aléatoire discrète, on note $X(\Omega) = \{\ x_i \mid i \in I\ \}$ avec $\overbrace{I = [\![1; n]\!]}^{\text{fini}}$ ou $\overbrace{I = \mathbb{N}}^{\text{dénombrable}}$
( et $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$)

• *Extrait du programme* : Une variable aléatoire est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est inclus dans un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathbb{R}$ indexé par une partie de $\mathbb{N}$.

• *Comment bien définir une variable aléatoire ?*

**En pratique 1 :** On nous donne $X(\Omega) = \{\ x_i \mid i \in I\ \}$ et $P(X = x_i) = p_i$

Vérifier si $X$ est bien définie revient à :

❶ Vérifier que les $x_i$ sont 2 à 2 distincts. ❷ que $\forall i \in I,\ p_i \geqslant 0$ ❸ et que $\sum\limits_{i \in I}$ vaut 1.

**Exemples** : Feuille Cours_5

**Proposition.**

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum p_n$ converge et a pour somme 1 , alors il existe une variable aléatoire réelle discrète $X$ sur $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$ vérifiant $P(X = x_n) = p_n$ pour tout entier naturel $n$.

**En pratique 2 :** *(On décrit une expérience aléatoire)*

On décrit une expérience aléatoire avec $\Omega$ quelconque. On note $E$ la partie de $\Omega$ où $X$ n'est pas définie.

$X$ est une variable aléatoire bien définie lorsque $P(E) = 0$.

Dans ce cas là on confond $\Omega$ et $\Omega \setminus E$

**Exemples** : Feuille Cours_5

• *Extrait du programme* : On tolère qu'une variable aléatoire issue d'une expérience aléatoire puisse ne pas être définie sur un événement de probabilité nulle.

## 1.2 Système complet d'événements associé à $X$

**Théorème.**

Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$

Si $X$ est une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{\ x_i \mid i \in I\ \}$ ( avec $i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$)

alors $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système *quasi*-complet d'événements.

## 1.3 Loi de probabilité

**Définition.**

Soit $X$ est une variable aléatoire discrète.

L'application $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X=x) \end{array}$ est appelée **loi de probabilité** de $X$.

**Définition.** *Loi conditionnelle.*

Soit $X$ est une variable aléatoire discrète et $A$ un événement de probabilité non nulle.

L'application $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_A(X=x) \end{array}$ est appelée **loi de probabilité de $X$ sachant $A$** .

## 1.4 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle discrète.

### 1.4.1 Espérance

**Définition** *(Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.)*

• Lorsque $X(\Omega)$ est fini, en notant $n = \text{card}(X(\Omega))$ et $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![1;n]\!]\ \}$

on appelle espérance mathématique de $X$ le réel : $E(X) \ = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, P(X=x_k)$

• Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, en notant $X(\Omega) = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\ \}$ ( avec les $(x_n)$ 2 à 2 distincts ),

$X$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x_n P(X=x_n)$ est absolument convergente.

alors l'espérance mathématique de $X$ est le réel : $E(X) \ = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X=x_n)$

**En pratique.**

• *Cas fini.*

"$X(\Omega)$ est fini donc $X$ admet une espérance et $E(X) \ = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, P(X=x_k)$"

• *Cas dénombrable.*

❶ " $X$ admet une espérance si et seulement si, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x_n P(X=x_n)$ est absolument convergente."

On montre que : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} |x_n| P(X=x_n)$ est convergente et on dit que $X$ admet une espérance.

❷ On calcule l'espérance $E(X) \ = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X=x_n)$

**Exemples** : Feuille Cours_5

**Remarques :**

• La convergence absolue est nécessaire pour que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X=x_n)$ ne dépende pas du choix des $(x_n)$ pour décrire $X(\Omega)$

• Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance. (Exemple : feuille Cours_5)

• Une variable aléatoire est dite **centrée** lorsque son espérance est nulle.

**Théorème :** *(linéarité)*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,

Si $X$ et $Y$ admettent chacune une espérance alors

pour tout réel $a$ et $b$, $aX + bY$ admet une espérance et $E(aX + bY) \ = \ aE(X) + bE(Y)$.

**Proposition :** *(Croissance)*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,

❶ Si $X \geqslant 0$ et $X$ admet une espérance alors $E(X) \geqslant 0$.

❷ Si $X \leqslant Y$ et si $X$ et $Y$ admettent chacune une espérance alors $E(X) \leqslant E(Y)$

**En effet :**

**Généralisation**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de variables aléatoires sur un même espace probabilisé et $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de réels.

Si les $X_k$ possèdent toutes une espérance alors $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$

**En effet :**

### 1.4.2 Théorème de transfert.

**Théorème.** *(Théorème de transfert)*

Soient $X$ une variable aléatoire réelle discrète et $f$ une fonction définie sur $X(\Omega)$,

**Dans le cas fini.** on note : $n$ le cardinal de $X(\Omega)$ et $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![1; n]\!]\ \}$,

l'espérance de $f(X)$ vérifie : $E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, P(X = x_k)$.

**Dans le cas dénombrable.** on note : $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$, ( avec les $(x_n)$ 2 à 2 distincts )

$f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente.

et alors l'espérance de $f(X)$ vérifie : $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\, P(X = x_n)$.

**Rédaction.**

- *Cas fini.*

  $X(\Omega)$ est fini et $f$ est définie sur $X(\Omega)$ donc *(théorème de transfert)* $f(X)$ admet une espérance

  et $E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, P(X = x_k)$

- *Cas dénombrable.*

  ❶ *($f$ est définie sur $X(\Omega)$)*

  ❷ $f(X)$ admet une espérance si et seulement si, $\sum_{n \geqslant 0} f(x_n) P(X = x_n)$ est absolument convergente.

  On montre que : $\sum_{n \geqslant 0} |f(x_n)| P(X = x_n)$ est convergente et on dit que $f(X)$ admet une espérance.

  ❸ On calcule l'espérance $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\, P(X = x_n)$

**Exemples** : feuille Cours_5

**Remarque :** $X$ peut admettre une espérance alors que $f(X)$ non.

**En effet :**

### 1.4.3 Variance d'une variable aléatoire discrète.

**Définition**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète.
Dire que $X$ admet une variance signifie que $X$ et $(X - E(X))^2$ admettent une espérance.
on définit alors sa variance par : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

**Remarques :**

- Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas de variance.
- Dire qu'une variable aléatoire est **réduite** signifie que sa variance est égale à 1.

### 1.4.4 Formule de Kœnig-Huygens.

**Lemme.** *(Exercice)*

Soit $X$ une variable aléatoire discrète,
Si $X^2$ admet une espérance alors $X$ admet une espérance.

**Démonstration.** *(Voir feuille cours_5_2)*

**Théorème :** *(Formule de Kœnig-Huygens).*

Soit $X$ est une variable aléatoire discrète,
$X$ admet une variance si, et seulement si, $X^2$ admet une espérance
et alors

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

**Démonstration.** *Faite au tableau.*

**Rédaction.**

**Cas fini.**

"$X(\Omega)$ est fini donc $X$ admet une variance et $E(X) = \cdots$, $E(X^2) = \cdots$, et ainsi $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$"

**Cas dénombrable.**

❶ " $X^2$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geqslant 0} x_n^2 P(X = x_n)$ est absolument convergente."

On montre que : $\sum_{n \geqslant 0} |x_n^2| P(X = x_n)$ est convergente et on dit que $X$ admet une variance.

❷ On calcule les deux espérances $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, P(X = x_n)$ et $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \, P(X = x_n)$

❸ On applique le théorème de Koenig-Huygens : $X$ admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

**Exemples** : Feuille Cours_5_2

### 1.4.5 Propriétés de la variance.

**Proposition :**

Quelle que soit la variable aléatoire $X$ admettant une variance,

① $V(X) \geqslant 0$.

② Si $V(X) = 0$ alors $\mathbb{P}([X = m]) = 1$ (où $m = E(X)$),

*On dit que $X$ est une variable quasi-certaine.*

③ Pour toute variable $X$ admettant une variance et $a$ et $b$ deux réels, on a :

$$aX + b \quad \text{admet une variance et} \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

**Démonstrations.**

### 1.4.6 Moments d'ordre supérieurs.

**Définition :**

Pour $X$ une variable aléatoire et $n$ un entier naturel,

Quand $X^n$ admet une espérance on appelle $E(X^n)$ le moment de $X$ d'ordre $n$.

### 1.4.7 Ecart-type.

**Définition :**

Quand $X$ admet une variance, l'écart-type d'une variable aléatoire $X$ est le réel : $\sqrt{V(X)}$

On note souvent : $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ou $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$,

d'où la notation $V(X) = \sigma^2$

**Définition :**

Pour $X$ une variable aléatoire admettant une variance $V(X) \neq 0$,

$X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée **variable aléatoire centré réduite** associée à $X$.

**Démonstration.**

# 2

# Indépendance.

## 2.1 Caractérisations.

*Revoir la définition générale de l'indépendance.*

**Caractérisation.** ***Indépendance de deux variables aléatoires discrètes.***

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes,
Dire que $X$ et $Y$ sont indépendantes signifie que :
quel que soit le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$

**Caractérisation.** ***Indépendance de $n$ variables aléatoires discrètes.***

Soient $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste *(finie)* de variables aléatoires discrètes,
Dire que les $X_k$ sont *(mutuellement)* indépendantes signifie que :
quel que soit la liste de réels $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k = x_k)$

## 2.2 Indépendance d'une suite de variables aléatoires.

*(Déja vu dans le chapitre Probabilité).*

**Définition**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
Dire que les variables de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :
toute liste finie extraite de la suite est (*mutuellement*) indépendante.

## 2.3 Propriétés de l'indépendance mutuelle

*(Déja vu dans le chapitre Probabilité).*

**Théorème :**

Soit $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,

❶ **Si** $X_1, , \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
toute sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$ l'est aussi.

❷ (***Lemme des coalitions***)
Soient $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$ deux fonctions,
**si** $X_1, \dots, X_p, \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
$f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

❸ Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
**si** $X_1, \dots, X_n$ sont (*mutuellement*) indépendantes **alors**
$f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont (*mutuellement*) indépendantes.

## 2.4 Théorèmes.

**Théorème :**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

❶ Si $X$ et $Y$ sont indépendantes et admettent des espérances alors
$XY$ admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

❷ Si $X$ et $Y$ sont indépendantes et admettent des variances alors
$X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

*On admet ❶ car il nous manque un théorème hors-programme, mais en admettant ❶ on peut démontrer ❷ .*
Démonstration de ❷ :

**Généralisation :**

Soit $(X_k)_{1<k\leqslant n}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

❶ Si les $X_k$ sont indépendantes et admettent des espérances alors

$$\prod_{k=1}^{n} X_k \text{ admet une espérance et } E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

❷ Si les $X_k$ sont indépendantes et admettent des variances alors

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ admet une variance et } V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

**Démonstration :**

## 2.5 Stabilité des lois de Poisson.

**Proposition.**

Soient $\lambda_1, \lambda_2$ deux réels non nuls et $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires *(sur le même espace probablisé)*,

$$\text{Si } \begin{cases} X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)\ ,\ \ X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2) \\ \text{et } X_1, X_2 \text{ sont indépendantes} \end{cases} \quad \text{alors } X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

**Démonstration** : *Voir feuille Cours_5_4*

**Généralisation .**

Soient $(X_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de variables aléatoires, $(\lambda_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de réels non nuls,
*(sur le même espace probablisé)*

on note : $X = \sum_{k=1}^{N} X_k$ et $\lambda = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k$.

Si les $X_k$ sont mutuellement indépendantes et si $\forall k \in \mathbb{N},\ X_k \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_k)$ alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

**Démonstration** : *Voir feuille Cours_5_4*

## 2.6 Complément.

**Théorème**

Soit $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille d'événements,
Les événements $A_k$ sont mutuellement indépendants
si, et seulement si, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_k}$ sont indépendantes.

# 3 Lois finies usuelles.

## 3.1 Loi certaine.

Soit $a$ un nombre réel.
Dire que $X$ est la variable certaine égale à $a$ signifie que $X$ est la fonction constante $X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a \end{array}$

On a : $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}([X = a]) = 1$, $\mathbb{E}(X) = a$ $V(X) = 0$.

**Remarque :** Dire que $X$ est "quasi-certaine égale à $a$" signifie que $\mathbb{P}([X = a]) = 1$

## 3.2 Loi de Bernoulli.

**Définition :**

Soit $p$ un réel de $]0,1[$,
dire que $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = \{0,1\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p \\ \mathbb{P}([X = 1]) = p \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a : $\mathbb{E}(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

**Remarque :** Si $A$ est un événement de $\Omega$ alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire et $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

**Simulation avec une fonction Python** :

```
def bernoulli(p):
    if rd.random() <= p :
        return 1
    return 0
```

## 3.3 Loi uniforme.

**Définition :**

Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$,
Dire que $X$ suit une loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$ signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = [\![a;b]\!] \\ \forall i \in [\![a;b]\!]\ , \quad \mathbb{P}([X = i]) = \dfrac{1}{b-a+1} \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a;b]\!])$, ( Attention : Ne pas confondre avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$)

**Proposition :**

$$\text{si } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a;b]\!]) \quad \text{alors} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}$$

**Démonstration.** *(A savoir faire)*

**Remarque** : *Savoir retrouver la variance (Voir la feuille Cours_5_2)* $V(X) = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$

**Simulation avec une fonction Python (sans `randint`) :**

```
def uniforme(a, b):
    return floor( a+ (b-a+1)*rd.random() )              # floor importé de math
```

**Remarque :** Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$ alors $\begin{cases} \forall x < 1, \quad F_X(x) = 0 \\ \forall x \in [1,n], \quad F_X(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \\ \forall x > n, \quad F_X(x) = 1 \end{cases}$

## 3.4 Loi binomiale.

**Définition :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p$ un réel de $]0,1[$, $X$ une variable aléatoire,
Dire que $X$ suit une loi binomiale de paramètres $(n,p)$ signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0;n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0;n \rrbracket \ , \quad \mathbb{P}([X=k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et on a $\mathbb{E}(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ *(démonstrations dans la feuille_5_2)*

**Dans quelle situation peut-on observer une loi binomiale ?**

Si une expérience est constituée de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et si $X$ désigne le nombre de succès alors $X$ suit la loi binomiale de paramètres $(n,p)$ où $p$ est la probabilité du succès.

**Remarque :** On se retrouve dans cette situation lors d'un tirage successif avec remise.

**Simulation avec une fonction Python :**

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```

**Proposition :** *Somme de $n$ variables de Bernoulli identiques et indépendantes.*

La somme de $n$ variables de Bernoulli de paramètre $p$ (*mutuellement*) indépendantes est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $(n,p)$

Soient $n$ un entier naturel non nuls et $p$ un réel de l'intervalle $]0,1[$

Si $\begin{cases} ① \ X_1, \dots, X_n \ \text{ sont indépendantes} \\ ② \ \forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, \quad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ ③ \ X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \end{cases}$ , alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

**Stabilité de la loi binomiale.** *(Complément)*

Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires, $n_1$, $n_2$ deux entiers naturels non nuls et $p$ un réel de $]0,1[$
Si $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1,p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2,p)$
alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2 \ , \ p)$$

**Généralisation .**

Soient $(X_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de variables aléatoires, $(n_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste d'entiers naturels non nuls et $p$ un réel de $]0,1[$, on note : $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} n_k$.
Si les $X_k$ sont mutuellement indépendantes et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n_k,p)$ alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

# 4

# Lois discrètes infinies usuelles.

## 4.1 Lois géométriques

### 4.1.1 Définition

Soient $X$ une variable aléatoire réelle et $p$ un réel de $]0,1[$,
Dire que $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ signifie :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = (1-p)^{n-1}\,p$$

**Remarques** :

- On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
- En notant $q = 1-p$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = q^{n-1}\,p$

**Situation type.** *(Rédaction)*
"Cette expérience est la succession d'un nombre indéfini d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succès est ............ la probabilité du succès vaut $p$,
$X$ est le rang du premier succès donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$."

### 4.1.2 Fonction de répartition.

**Description.**

Soit $F$ la fonction de répartition d'une variable $X$ suivant une loi géométrique de paramètre $p$,
❶ Pour tout $n < 1$, $\quad F(n) = 0$
❷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F$ est constante sur $[n; n+1[$ et $F(n) = 1 - q^n$

**Remarques :** *(Feuille Cours_5_3)*

- La démonstration *(à refaire)* est le calcul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}\,p = 1 - q^n$,

  mais pour le retrouver il est plus simple de remarquer :

  $[X > n]$ : "avoir des échecs au cours des $n$ premières épreuves", donc $P(X > n) = q^n$

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \leqslant n) = 1 - q^n$ et $P(X > n) = q^n$

### 4.1.3 Espérance et variance.

**Proposition.**

Soit $X$ un variable aléatoire réelle,
si $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ alors $X$ admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

**Démonstration.** *(Feuille Cours_5_3)*

### 4.1.4 Loi sans mémoire.

**Proposition**

> Soient $X$ une variable aléatoire réelle et $p$ un réel de $]0,1[$,
> si $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ alors
> $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \quad P\Big(\,[X=n+k]\,\big|\,[X>k]\Big) = P(\,[X=n]\,)$$

**Démonstration.** *(Feuille Cours_5_3)*

**Remarques :** *(interprétation)*

- En se plaçant dans la situation type : $[X>k]$ : " Pas de succès pendant les $k$ premiers lancers "
  on observe les $n$ prochains lancers le rang du premier succès suit la loi $\mathcal{G}(p)$
- Si on n'observe l'expérience de 1 à $k$ et qu'il n'y a pas eu de succès alors la loi du temps d'attente du premier succès est la même qu'au début.
- Encore une autre interprétation :
  On fixe $n\in\mathbb{N}^*$, et on note $Y = X-n$,
  Sachant $(X>n)$ *("il n'y a eu que des échecs du rang 1 au rang n")*,
  $Y$ est alors le temps d'attente du premier succès à partir du rang $n+1$,
  La proposition a montré que : la loi conditionnelle sachant $(X>n)$ de $Y$ est la loi $\mathscr{G}(p)$
- Certains préfèrent la proposition suivante : *(nous la retrouverons avec la loi exponentielle)*
$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \quad P\Big(\,[X>n+k]\,\big|\,[X>k]\Big) = P(\,[X>n]\,)$$

### 4.1.5 Simulation numérique.

**Simulation avec une fonction Python** :

```
def geometrique(p):
    x = 1
    while rd.random() > p :
        x += 1
    return x
```

## 4.2 Loi de Poisson

### 4.2.1 Définition

**Définition.**

> Soient $X$ une variable aléatoire réelle et $\lambda$ un réel strictement positif,
> Dire que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ signifie que :
> $$X(\Omega)=\mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}, \quad P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

**Remarques :**

- on note : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$
- Siméon Denis Poisson (1781-1840)
- Ne pas oublier de préciser que $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ au début de cette définition.
- Savoir vérifier rapidement que c'est bien une loi de probabilité .

### 4.2.2 Espérance et variance.

**Proposition.**

> Soient $X$ une variable aléatoire réelle et $\lambda$ un réel strictement positif,
> Si $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ alors, admet une espérance et une variance et
> $$E(X)=\lambda \quad \text{et} \quad V(X)=\lambda$$

**Démonstration** : *feuille_Cours_5_3*

### 4.2.3 Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson.

**Proposition.**

Soient $X$ une variable aléatoire réelle et $\lambda$ un réel strictement positif,

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

En posant $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$ on obtient :

$$\binom{n}{k} p_n^k \, (1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

**Démonstration** : *feuille_Cours_5_3*

**Approximation**

Quand $n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0{,}1$ on peut approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$

### 4.2.4 Simulation numérique.

**Approximation**

Quand $n \geqslant 30$ et $\dfrac{\lambda}{n} \leqslant 0{,}1$ on peut approcher par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$

Remarque : $n \geqslant 30$ et $\dfrac{\lambda}{n} \leqslant 0{,}1$ équivaut à $n \geqslant \max(30, 10\lambda)$

**Simulation avec une fonction Python** :

```
def loi_poisson(lbd):           # attention lambda est un mot réservé du langage Python
    n = int(max(10*lbd, 30))    # on choisit n pour avoir n >= 30 et p <= 0.1
    p = lbd/n
    return binomiale(n, p)
```

Il existe aussi `rd.poisson(lbd)` du module `random`.