Table des matières

1 Variables aléatoires discrètes. 2

1.1 Définition . . . 2

1.2 Système complet d'événements associé à X . . . 2

1.3 Loi de probabilité . . . 3

1.4 Indépendance. . . . 3

1.5 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle discrète. . . . 3

1.5.1 Espérance . . . 3

1.5.2 Théorème de transfert. . . . 4

1.5.3 Variance d'une variable aléatoire discrète. . . . 4

1.5.4 Formule de Kœnig-Huygens. . . . 5

1.5.5 Propriétés de la variance. . . . 5

1.5.6 Moments d'ordre supérieurs. . . . 5

1.5.7 Ecart-type. . . . 5

1.6 Avec des variables aléatoires indépendantes. . . . 6

2 Lois finies usuelles. 7

2.1 Loi certaine. . . . 7

2.2 Loi de Bernoulli. . . . 7

2.3 Loi uniforme. . . . 7

2.4 Loi binomiale. . . . 8

3 Lois discrètes infinies usuelles. 9

3.1 Lois géométriques . . . 9

3.1.1 Définition . . . 9

3.1.2 Fonction de répartition. . . . 9

3.1.3 Espérance et variance. . . . 9

3.1.4 Loi sans mémoire. . . . 10

3.1.5 Simulation numérique. . . . 10

3.2 Loi de Poisson . . . 10

3.2.1 Définition . . . 10

3.2.2 Espérance et variance. . . . 10

3.2.3 Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson. . . . 11

3.2.4 Simulation numérique. . . . 11

3.2.5 Stabilité des lois de Poisson. . . . 11

1

Variables aléatoires discrètes.

On considère un espace probabilisé $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$ quelconque.

1.1 Définition

Définition.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$
Dire que X est une variable aléatoire discrète signifie que $X(\Omega)$ est un ensemble de réels fini ou dénombrable.

Remarques :

• Lorsque X est une variable aléatoire discrète, on note $X(\Omega) = \{ x_i \mid i \in I \}$ avec $\overbrace{I = [\![1; n]\!]}^{\text{fini}}$ ou $\overbrace{I = \mathbb{N}}^{\text{dénombrable}}$
(et $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$)

• *Extrait du programme* : Une variable aléatoire est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est inclus dans un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathbb{R}$ indexé par une partie de $\mathbb{N}$.

• *Comment bien définir une variable aléatoire ?*

En pratique 1 : On nous donne $X(\Omega) = \{ x_i \mid i \in I \}$ et $P(X = x_i) = p_i$
Vérifier si X est bien définie revient à :

❶ Vérifier que les x_i sont 2 à 2 distincts. ❷ que $\forall i \in I,\ p_i \geqslant 0$ ❸ et que $\sum_{i \in I}$ vaut 1.

Exemples : **Ex 2.** de la feuille Cours_5

Proposition.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum p_n$ converge et a pour somme 1 , alors il existe une variable aléatoire réelle discrète X sur $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$ vérifiant $P(X = x_n) = p_n$ pour tout entier naturel n.

En pratique 2 : *(On décrit une expérience aléatoire)*
On décrit une expérience aléatoire avec Ω quelconque. On note E la partie de Ω où X n'est pas définie.
X est une variable aléatoire bien définie lorsque $P(E) = 0$.
Dans ce cas là on confond Ω et $\Omega \setminus E$

Exemples : **Ex 3.** de la feuille Cours_5

• *Extrait du programme* : On tolère qu'une variable aléatoire issue d'une expérience aléatoire puisse ne pas être définie sur un événement de probabilité nulle.

1.2 Système complet d'événements associé à X

Théorème.

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$
Si X est une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{ x_i \mid i \in I \}$ (avec $i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$)
alors $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système *quasi*-complet d'événements.

Démonstration. *(avortée au tableau)*

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega \setminus E$ avec $P(E) = 0$.
on suppose : $X(\Omega \setminus E) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *(dans l'énoncé du théorème on confond $X(\Omega \setminus E)$ et $X(\Omega)$*

1.3 Loi de probabilité

Définition.

Soit X est une variable aléatoire discrète.
L'application $\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}$ est appelée **loi de probabilité** de X.

Définition. *Loi conditionnelle.*

Soit X est une variable aléatoire discrète et A un événement de probabilité non nulle.
L'application $\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_A(X = x) \end{array}$ est appelée **loi de probabilité de X sachant A** .

1.4 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle discrète.

1.4.1 Espérance

Définition *(Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.)*

- Lorsque $X(\Omega)$ est fini, en notant $n = \text{card}(X(\Omega))$ et $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![1; n]\!]\}$

  on appelle espérance mathématique de X le réel : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, P(X = x_k)$
- Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, en notant $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (avec les (x_n) 2 à 2 distincts),

  X admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

  alors l'espérance mathématique de X est le réel : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X = x_n)$

En pratique.

- *Cas fini.*

  "$X(\Omega)$ est fini donc X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\, P(X = x_k)$"
- *Cas dénombrable.*

  ❶ " X admet une espérance si et seulement si, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente."

  On montre que : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} |x_n| P(X = x_n)$ est convergente.

  ❷ On calcule la somme $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X = x_n)$

Exemples : **Ex 4.** de la feuille Cours_5

Remarques :

- La convergence absolue est nécessaire pour que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, P(X = x_n)$ ne dépende pas du choix des (x_n) pour décrire $X(\Omega)$
- Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance. (**Ex 4.** de la feuille Cours_5)
- Une variable aléatoire est dite **centrée** lorsque son espérance est nulle.

Théorème : *(linéarité)*

Soient X et Y deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,
Si X et Y admettent chacune une espérance alors
pour tout réel a et b, $aX + bY$ admet une espérance et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Proposition : *(Croissance)*

Soient X et Y deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,
❶ Si $X \geqslant 0$ et X admet une espérance alors $E(X) \geqslant 0$.
❷ Si $X \leqslant Y$ et si X et Y admettent chacune une espérance alors $E(X) \leqslant E(Y)$

En effet :

Généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste de variables aléatoires sur un même espace probabilisé
et $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste de réels.
Si les X_k possèdent toutes une espérance alors $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$

En effet :

1.4.2 Théorème de transfert.

Théorème. *(Théorème de transfert)*

Soient X une variable aléatoire réelle discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$,

Dans le cas fini. on note : n le cardinal de $X(\Omega)$ et $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![1;n]\!]\}$,
l'espérance de $f(X)$ vérifie : $E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, P(X = x_k)$.

Dans le cas dénombrable. on note : $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, (avec les (x_n) 2 à 2 distincts)
$f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente.
et alors l'espérance de $f(X)$ vérifie : $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\, P(X = x_n)$.

Rédaction.

- *Cas fini.*
  $X(\Omega)$ est fini et f est définie sur $X(\Omega)$ donc *(théorème de transfert)* $f(X)$ admet une espérance
  et $E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, P(X = x_k)$
- *Cas dénombrable.*
  ❶ *(f est définie sur $X(\Omega)$)*
  ❷ $f(X)$ admet une espérance si et seulement si, $\sum_{n\geqslant 0} f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente.
  On montre que : $\sum_{n\geqslant 0} |f(x_n)|P(X = x_n)$ est convergente.
  ❸ On calcule la somme $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\, P(X = x_n)$

Exemples : **Ex 6.** de la feuille Cours_5

Remarque : X peut admettre une espérance alors que $f(X)$ non.

En effet :

1.4.3 Variance d'une variable aléatoire discrète.

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète.
Dire que X admet une variance signifie que X et $(X - E(X))^2$ admettent une espérance.
on définit alors sa variance par : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

Remarques :

• Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas de variance.

• Dire qu'une variable aléatoire est **réduite** signifie que sa variance est égale à 1.

1.4.4 Formule de Kœnig-Huygens.

Lemme. *(Exercice)*

Soit X une variable aléatoire discrète,
Si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance.

Démonstration. *(Voir feuille cours_5_ter)*

Théorème : *(Formule de Kœnig-Huygens).*

Soit X est une variable aléatoire discrète,
X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance
et alors
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Démonstration. *Faite au tableau.*

Rédaction.

Cas fini.

"$X(\Omega)$ est fini donc X admet une variance et $E(X) = \cdots$, $E(X^2) = \cdots$, et ainsi $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$"

Cas dénombrable.

❶ " X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\sum_{n \geqslant 0} x_n^2 P(X = x_n)$ est absolument convergente."

On montre que : $\sum_{n \geqslant 0} |x_n^2| P(X = x_n)$ est convergente.

❷ On calcule la somme $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \, P(X = x_n)$

❸ On applique le théorème de Koenig-Huygens : X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Exemples : Feuille Cours_5_ter

1.4.5 Propriétés de la variance.

Proposition :

Quelle que soit la variable aléatoire X admettant une variance,

① $V(X) \geqslant 0$.

② Si $V(X) = 0$ alors $\mathbb{P}([X = m]) = 1$ (où $m = E(X)$),

On dit que X est une variable quasi-certaine.

③ Pour toute variable X admettant une variance et a et b deux réels, on a :

$$aX + b \quad \text{admet une variance et} \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Démonstrations.

1.4.6 Moments d'ordre supérieurs.

Définition :

Pour X une variable aléatoire et n un entier naturel,
Quand X^n admet une espérance on appelle $E(X^n)$ le moment de X d'ordre n.

1.4.7 Ecart-type.

Définition :

Quand X admet une variance, l'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel : $\sqrt{V(X)}$

On note souvent : $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ou $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$,

d'où la notation $V(X) = \sigma^2$

Définition :

Pour X une variable aléatoire admettant une variance $V(X) \neq 0$,
$X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée **variable aléatoire centré réduite** associée à X.

Démonstration.

2

Lois finies usuelles.

2.1 Loi certaine.

Soit a un nombre réel.
Dire que X est la variable certaine égale à a signifie que X est la fonction constante $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a \end{array}$

On a : $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}([X = a]) = 1$, $\mathbb{E}(X) = a$ $V(X) = 0$.

Remarque : Dire que X est "quasi-certaine égale à a" signifie que $\mathbb{P}([X = a]) = 1$

2.2 Loi de Bernoulli.

Définition :

Soit p un réel de $]0, 1[$,

dire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p \\ \mathbb{P}([X = 1]) = p \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on a : $\mathbb{E}(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Remarque : Si A est un événement de Ω alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire et $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

Simulation avec une fonction Python :

```
def bernoulli(p):
    if random() <= p :
        return 1
    return 0
```

2.3 Loi uniforme.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$,

Dire que X suit une loi uniforme sur $[\![a; b]\!]$ signifie que : $\begin{cases} X(\Omega) = [\![a; b]\!] \\ \forall i \in [\![a; b]\!] \ , \quad \mathbb{P}([X = i]) = \dfrac{1}{b - a + 1} \end{cases}$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a; b]\!])$, (Attention : Ne pas confondre avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$

Proposition :

$$\text{si} \quad X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a; b]\!]) \quad \text{alors} \quad E(X) = \frac{a + b}{2}$$

Démonstration. *(A savoir faire)*

Remarque : *Savoir retrouver la variance (Voir la feuille Cours_5_ter)* $V(X) = \dfrac{(b - a)(b - a + 2))}{12}$

Simulation avec une fonction Python (sans `randint`) : *(feuille info 6)*

```
def uniforme(a, b):
    return floor( a+ (b-a+1)*rd.random() )          # floor importé de math
```

Remarque : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1;n]\!]\right)$ alors $\begin{cases} \forall x < 1, \quad F_X(x) = 0 \\ \forall x \in [1,n], \quad F_X(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \\ \forall x > n, \quad F_X(x) = 1 \end{cases}$

2.4 Loi binomiale.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un réel de $]0,1[$, X une variable aléatoire,
Dire que X suit une loi binomiale de paramètres (n,p) signifie que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = [\![0;n]\!] \\ \forall k \in [\![0;n]\!] \ , \quad \mathbb{P}([X=k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et on a $\mathbb{E}(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ *(démonstrations faites dans la feuille_5_ter)*

Dans quelle situation peut-on observer une loi binomiale ?

Si une expérience est constituée de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et si X désigne le nombre de succès alors X suit la loi binomiale de paramètres (n,p) où p est la probabilité du succès.

Remarque : On se retrouve dans cette situation lors d'un tirage successif avec remise.

Simulation avec une fonction Python :

```
def binomiale(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        x += bernoulli(p)
    return x
```

Proposition : *Somme de n variables de Bernoulli identiques et indépendantes.*

La somme de n variables de Bernoulli de paramètre p (*mutuellement*) indépendantes est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n,p)

Soient n un entier naturel non nuls et p un réel de l'intervalle $]0,1[$

Si $\begin{cases} ① \ X_1, \dots, X_n \ \text{ sont indépendantes} \\ ② \ \forall i \in [\![1;n]\!], \quad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \\ ③ \ X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \end{cases}$, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

Stabilité de la loi binomiale. *(Complément)*

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, n_1, n_2 deux entiers naturels non nuls et p un réel de $]0,1[$
Si X_1 et X_2 sont indépendantes et si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1,p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2,p)$
alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2 \, , \, p)$$

Généralisation .

Soient $(X_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de variables aléatoires, $(n_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste d'entiers naturels non nuls et p un réel de $]0,1[$, on note : $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} n_k$.

Si les X_k sont mutuellement indépendantes et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n_k,p)$ alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

3

Lois discrètes infinies usuelles.

3.1 Lois géométriques

3.1.1 Définition

Soient X une variable aléatoire réelle et p un réel de $]0,1[$,
Dire que X suit une loi géométrique de paramètre p signifie :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1-p)^{n-1}\, p$$

Remarques :

- On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
- En notant $q = 1 - p$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = q^{n-1}\, p$

Situation type. *(Rédaction)*
"Cette expérience est la succession d'un nombre indéfini d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succès est ..... la probabilité du succès vaut p,
X est le rang du premier succès donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$."

3.1.2 Fonction de répartition.

Description.

Soit F la fonction de répartition d'une variable X suivant une loi géométrique de paramètre p,
❶ Pour tout $n < 1$, $\quad F(n) = 0$
❷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F est constante sur $[n; n+1[$ et $F(n) = 1 - q^n$

Remarques : *(Feuille Cours_5_bis)*

- La démonstration *(à refaire)* est le calcul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}\, p = 1 - q^n$,
  mais pour le retrouver il est plus simple de remarquer :
  $[X > n]$: "avoir des échecs au cours des n premières épreuves", donc $P(X > n) = q^n$
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \leqslant n) = 1 - q^n$ et $P(X > n) = q^n$

3.1.3 Espérance et variance.

Proposition.

Soit X un variable aléatoire réelle,
si X suit une loi géométrique de paramètre p alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration. *(Feuille Cours_5_bis)*

3.1.4 Loi sans mémoire.

Proposition

Soient X une variable aléatoire réelle et p un réel de $]0,1[$,
si X suit une loi géométrique de paramètre p alors

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad P\Big([X = n+k] \,\big|\, [X > k] \Big) = P(\,[X = n]\,)$$

Démonstration. *(Feuille Cours_5_bis)*

Remarques : *(interprétation)*

- En se plaçant dans la situation type : $[X > k]$: " Pas de succès pendant les k premiers lancers "
  on observe les n prochains lancers le rang du prochain succès suit la loi $\mathcal{G}(p)$
- Si on n'observe l'expérience de 1 à k et qu'il n'y a pas eu de succès alors la loi du temps d'attente du prochain succès est la même qu'au début.
- Encore une autre interprétation :
  On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $Y = X - n$,
  Sachant $(X > n)$ *("il n'y a eu que des échecs du rang 1 au rang n")*,
  Y est alors le temps d'attente du premier succès à partir du rang $n+1$,
  La proposition a montré que : la loi conditionnelle sachant $(X > n)$ de Y est la loi $\mathscr{G}(p)$

- Certains préfèrent la proposition suivante : *(nous la retrouverons avec la loi exponentielle)*

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad P\Big([X > n+k] \,\big|\, [X > k] \Big) = P(\,[X > n]\,)$$

3.1.5 Simulation numérique.

Simulation avec une fonction Python :

```
def geometrique(p):
    x = 1
    while random() > p :
        x += 1
    return x
```

3.2 Loi de Poisson

3.2.1 Définition

Définition.

Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,
Dire que X suit une loi de Poisson de paramètre λ signifie que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Remarques :

- on note : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$
- Siméon Denis Poisson (1781-1840)
- Ne pas oublier de préciser que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ au début de cette définition.
- Savoir vérifier rapidement que c'est bien une loi de probabilité .

3.2.2 Espérance et variance.

Proposition.

Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,
Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors, admet une espérance et une variance et
$E(X) = \lambda \quad$ et $\quad V(X) = \lambda$

Démonstration : *feuille_Cours_5_bis*

3.2.3 Approximation de lois binomiales par des lois de Poisson.

Proposition.

Soient X une variable aléatoire réelle et λ un réel strictement positif,

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

En posant $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$ on obtient :

$$\binom{n}{k} p_n^k\,(1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Démonstration : *feuille_Cours_5_bis*

Approximation

Quand $n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0{,}1$ on peut approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$

3.2.4 Simulation numérique.

Approximation

Quand $n \geqslant 30$ et $\dfrac{\lambda}{n} \leqslant 0{,}1$ on peut approcher par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$

Remarque : $n \geqslant 30$ et $\dfrac{\lambda}{n} \leqslant 0{,}1$ équivaut à $n \geqslant \max(30, 10\lambda)$

Simulation avec une fonction Python :

```
def loi_poisson(lbd):           # attention lambda est un mot réservé du langage Python
    n = int(max(10*lbd, 30))    # on choisit n pour avoir n >= 30 et p <= 0.1
    return binomiale(n, lbd/n)
```

Il existe aussi `rd.poisson(lbd)` du module `random`.

4

Indépendance.

4.1 Caractérisations.

Revoir la définition générale de l'indépendance.

Caractérisation. ***Indépendance de deux variables aléatoires discrètes.***

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes,
Dire que X et Y sont indépendantes signifie que :
quel que soit le couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$

Caractérisation. ***Indépendance de n variables aléatoires discrètes.***

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste *(finie)* de variables aléatoires discrètes,
Dire que les X_k sont *(mutuellement)* indépendantes signifie que :
quel que soit la liste $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que $x_k \in X_k(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k = x_k)$

On rappelle ci-dessous la définition d'une suite de variables aléatoires.

Définition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une liste de variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
Dire que les variables de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont (*mutuellement*) indépendantes signifie que :
toute liste finie extraite de la suite est (*mutuellement*) indépendante.

4.2 Théorèmes.

Théorème :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
❶ Si X et Y sont indépendantes et admettent des espérances alors
XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.
❷ Si X et Y sont indépendantes et admettent des variances alors
$X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

On admet ❶ car il nous manque un théorème hors-programme, mais en admettant ❶ on peut démontrer ❷ .
Démonstration de ❷ :

Généralisation :

Soit $(X_k)_{1<k\leqslant n}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

❶ Si les X_k sont indépendantes et admettent des espérances alors

$$\prod_{k=1}^{n} X_k \text{ admet une espérance et } E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

❷ Si les X_k sont indépendantes et admettent des variances alors

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ admet une variance et } V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

4.3 Stabilité des lois de Poisson.

Proposition.

Soient λ_1, λ_2 deux réels non nuls et X_1 et X_2 deux variables aléatoires *(sur le même espace probablisé)*,

$$\text{Si } \begin{cases} X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)\ ,\ \ X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2) \\ \text{et } X_1, X_2 \text{ sont indépendantes} \end{cases} \quad \text{alors } X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Démonstration : *Voir feuille Cours_5_quater*

Généralisation .

Soient $(X_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de variables aléatoires, $(\lambda_k)_{1<k\leqslant N}$ une liste de réels non nuls,
(sur le même espace probablisé)

on note : $X = \sum_{k=1}^{N} X_k$ et $\lambda = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k$.

Si les X_k sont mutuellement indépendantes et si $\forall k \in \mathbb{N},\ X_k \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_k)$ alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

Démonstration : *Voir feuille Cours_5_quater*