Colles de mathématiques - Semaine 7 - du 18/11/24

La colle commencera par une question de cours, puis un exercice simple.

Pour la question de cours : Vérifier que la différence entre définition et théorème est bien comprise.

Pour l'exercice : un calcul de probabilité relativement simple avec ou sans variables aléatoires.

On vérifiera la bonne maitrise des deux théorèmes fondamentaux (FPT-FPC).

Et enfin si ces deux obstacles sont passés : des exercices de probabilité moins élémentaires *(il est temps de se mettre au niveau)* sur le programme de première ou de deuxième année.

- **Révisions : Dénombrement.**

  Définition d'un ensemble fini et de son cardinal. Propriétés.
  Nombre des p-listes. Tirages successifs avec remise.
  Nombre des p-listes sans répétitions. Tirages successifs sans remise. Nombre des permutations.
  Nombre des p-combinaisons. Tirages simultanés. Dénombrement des parties d'un ensemble fini.
  Dénombrement des anagrammes.

- **Révisions : Probabilités sur un univers fini.**

  Quand Ω est fini, on prend $\mathscr{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements.

  Propriétés et vocabulaire des événements. Définition d'une probabilité. Propriétés.

  Cas d'équiprobabilité. Modèles classiques de tirages dans des urnes. Lien avec le dénombrement.

  Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Indépendance.

- **Probabilités.**

  Ensemble des événements sur un ensemble quelconque : Notion de tribu.

  Définition des événements $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et propriétés.

  Définition d'un système complet d'événements.

  Définition d'une probabilité. (*Axiome de σ-additivité*).

  Evénements négligeables, presque sûrs et système quasi-complet d'événements.

  Formule des probabilités totales. (*avec un système complet ou un système quasi-complet*).

  Définition d'une variable aléatoires quelconques.

  Définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle quelconque.

  Propriétés communes à toutes les fonctions de répartitions.

  Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires réelles, de n VAR, d'une suite de VAR.

  Lemme de coalition.

- **Variables aléatoires réelles discrètes.**

  Définition d'une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$.

  Système *quasi*-complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète.

  Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

  Condition d'existence et définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.

  Linéarité. Croissance.

  Théorème de transfert.

- **Python.**

  Simulation des tirages usuelles, estimation des probabilités et des espérances.

Remarques et exemples de questions de cours :

- Question de cours sur : "Dénombrement ".

  Notation et nombre de p-listes.
  Notation et nombre de p-listes sans répétitions.
  Notation et nombre de p-combinaisons.
  Nombre de parties d'un ensemble fini.
  Nombre d'anagrammes.

- Question de cours sur : "Probabilité ".

  Définition d'une probabilité. *(première année et deuxième année)*
  Définition d'un système complet d'événements. *(première année et deuxième année)*
  Définition d'un système quasi-complet d'événements.
  Théorème des probabilités composées.
  Théorème des probabilités totales. *(première année et deuxième année)*
  Définition de l'indépendance de deux événements. de l'indépendance mutuelle de n événements.
  Définition d'une variable aléatoire quelconque. *(première année et deuxième année)*
  Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires quelconques,
  de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires et d'une suite de variables aléatoires.
  Définition de l'espérance d'une variable aléatoire. *(première année et deuxième année)*
  Enoncé du théorème de transfert.

On pourra vérifier que les élèves comprennent la différence entre :

X prend exactement n valeurs distinctes, autrement dit : $X(\Omega) = \left\{ x_i \mid i \in [\![1;n]\!] \right\}$ avec $i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$
et
L'ensemble des valeurs prises par X est dénombrable, autrement dit : $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$
avec $i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$

- Modélisation usuelle des tirages dans une urne.
- Simulation informatique des tirages usuels.

Remarque :

Le cours sur les séries doit pouvoir être mis en oeuvre dans ces chapitres.