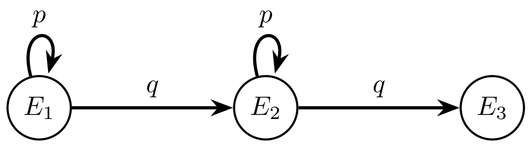
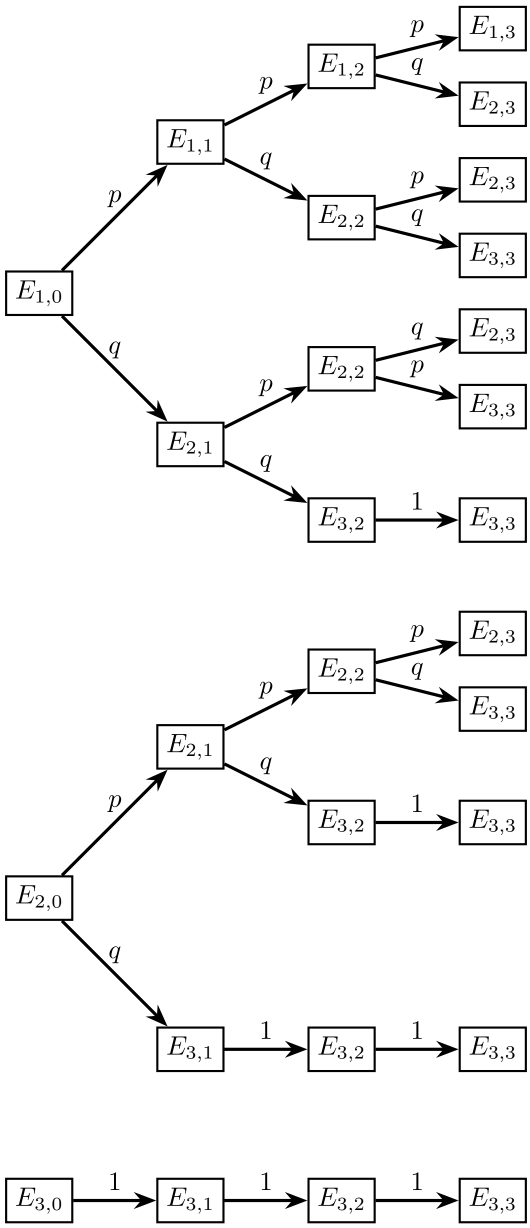
Correction de la feuille_Exo_7 : Autour des chaines de Markov.

Ex 1 : 1)



2) *Des événements sur les noeuds et des probabilités conditionnelles sur les arrêtes.*



3) La formule des probabilité totales avec le système complet : $(E_{1,k}, E_{2,k}, E_{3,k})$ donne :

$$P(E_{1,k+1}) = P(E_{1,k})P_{E_{1,k}}(E_{1,k+1}) + P(E_{2,k})P_{E_{2,k}}(E_{1,k+1}) + P(E_{3,k})P_{E_{3,k}}(E_{1,k+1})$$

ou encore

$$P(E_{1,k+1}) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$$

En raisonnant ligne par ligne on obtient :

$$P(E_{2,k+1}) = \begin{pmatrix} q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$$

$$P(E_{3,k+1}) = \begin{pmatrix} 0 & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{En prenant } A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix} \text{ on a bien : } \begin{pmatrix} P(E_{1,k+1}) \\ P(E_{2,k+1}) \\ P(E_{3,k+1}) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}}$$

On remarque :

$$\begin{pmatrix} P(E_{1,k+1}) \\ P(E_{2,k+1}) \\ P(E_{3,k+1}) \end{pmatrix} = \left(\quad \left(P_{E_{j,k}}(E_{i,k+1})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \quad \right) \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$$

4) En passant à la transposée sur la relation précédente on obtient :

$$\begin{pmatrix} P(E_{1,k+1}) & P(E_{2,k+1}) & P(E_{3,k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) & P(E_{2,k}) & P(E_{3,k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) On note $X_k = \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix}$.

La question 3) à montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = AX_k$,

on en déduit par un raisonnement par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k = A^k X_0$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} P(E_{1,0}) \\ P(E_{2,0}) \\ P(E_{3,0}) \end{pmatrix}.}$$

6) On raisonne comme dans la question 1) sur chaque ligne i on a : (*formule des probabilités totales*)

$$P(E_{i,k}) = \begin{pmatrix} P_{E_{1,0}}(E_{i,k}) & P_{E_{2,0}}(E_{i,k}) & P_{E_{3,0}}(E_{i,k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_{1,0}) \\ P(E_{2,0}) \\ P(E_{3,0}) \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\boxed{\begin{pmatrix} P(E_{1,k}) \\ P(E_{2,k}) \\ P(E_{3,k}) \end{pmatrix} = \left(\quad \left(P_{E_{j,0}}(E_{i,k})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \quad \right) \begin{pmatrix} P(E_{1,0}) \\ P(E_{2,0}) \\ P(E_{3,0}) \end{pmatrix}}$$

7) On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k = A^k X_0 \quad$ et $\quad X_k = \left(\left(P_{E_{j,0}}(E_{i,k})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}\right) X_0$.

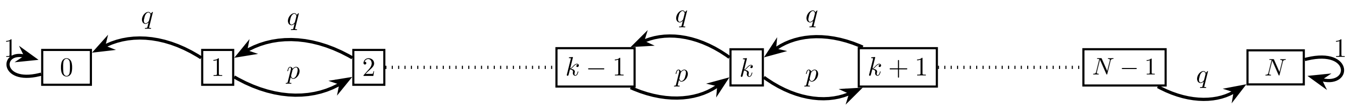
Ces relations sont vraies quelle que soit la matrice X_0 donc

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j), \quad (A^k)_{i,j} = P_{E_{j,0}}(E_{i,k})}$$

$(A^k)_{i,j}$ est la probabilité que le système soit dans l'état E_i après k heures sachant qu'il était en E_j à l'instant initial.

Ex 2 : *La ruine du joueur*

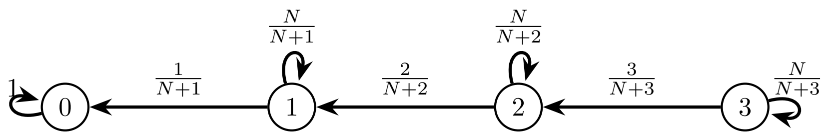
1)



2) En appliquant pour chaque ligne la formule des probabilités totales avec le système complet : $((X_n = k))_{0 \leqslant k \leqslant N}$

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \\ \vdots \\ P(X_{n+1}=N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & & & 0 \\ 0 & p & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & q & 0 \\ \vdots & & & \ddots & p & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ \vdots \\ P(X_n=N) \end{pmatrix}$$

Ex 3 :



1) En appliquant pour chaque ligne la formule des probabilités totales avec le système complet : $(E_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant 3}$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{N+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{N+1} & \frac{2}{N+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{N+2} & \frac{3}{N+3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N}{N+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

2) *(question avec des calculs pas simples)*
On trouve :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} n+2 \\ -2(n+1) \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} (n+3)^2 \\ -3(n+1)(n+3) \\ 3n(n+2) \\ -n \end{pmatrix}$$

3) *Des idées, mais je en vois pas d'approche avec des calculs raisonnables.*
On remarque que C_0, C_1, C_2 et C_3 forment une base de vecteurs propres de M. On note P la matrice de passage de la base canonique à la base (C_0, C_1, C_2, C_3).

On a alors $MP = P\Delta$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{N+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{N+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N}{N+3} \end{pmatrix}$ on en déduit que :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{N}{N+1}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{N}{N+2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{N}{N+3}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : *(non corrigé)*