Feuille_Cours_5_ter : Variables aléatoires discrètes. Variance.

Définition. *(Variance d'une variable aléatoire)*

Théorème. *(Formule de Kœnig-Huygens).*

Théorème : *(Variance de $aX + b$)*

Ex 1 : Soit X une variable aléatoire discrète telle que X^2 admet une espérance.

1) Question préliminaire : montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant 1 + x^2$.
2) En déduire que : X possède une espérance.
3) Enoncer une version plus simple du théorème de la formule de Kœnig-Huygens.

Ex 2 : 1) Soit X la variable aléatoire de loi de probabilité :

x	-2	-1	0	1
$P(X = x)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$

Calculer $V(X)$.

2) Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p.

On rappelle que $E(X) = p$, déterminer la variance de X.

3) a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$.

On rappelle que $E(X) = \dfrac{n}{2}$, Montrer que : $V(X) = \dfrac{n^2 + 2n}{12}$

b. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a; b]\!]$ *(où a et b sont deux entiers vérifiant $a \leqslant b$).*

Montrer que $V(X) = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$

4) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n, p).

On rappelle que $E(X) = np$, Montrer que $V(X) = np(1-p)$.

Ex 3 : Dans les cas suivants, calculer sa variance si elle existe.

1) $X(\Omega) = \{(-1)^{n+1}n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P\big([X = (-1)^{n+1}n]\big) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$

2) $X(\Omega) = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(\left[X = \dfrac{(-1)^n}{n}\right]\right) = \dfrac{n}{2^{n+1}}$

3) $X(\Omega) = \{2n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\big([X = 2n]\big) = \dfrac{2}{3^n}.$

4) $X(\Omega) = \{(-1)^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P\big([X = (-1)^n 2^n]\big) = \dfrac{2^n e^{-2}}{n!}$

5) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P\big([X = n\big) = \dfrac{1}{e\, n!}$