Sommes doubles.

1. Somme double rectangulaire.

On note $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j}$ ou $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij}$ la somme de tous les nombres $a_{i,j}$ lorsque i va de 1 à n et j de 1 à m.

Autres notations : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i;j\leqslant n} a_{i,j}$ ou $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;m]\!]} a_{i,j}$

On peut voir cette somme, comme une somme de sommes :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

On note aussi (*sans parenthèses*) :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}$$

2. Un cas particulier : $\boldsymbol{a_{ij} = \alpha_i\beta_j}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} \alpha_i\beta_j &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\right)\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,.\,\sum_{i=1}^{m}\beta_i}$$

Attention. La propriété suivante est fausse :

Pour tout entier naturel n et des nombres $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ...$ et b_n ,

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)}$$

Dans cette égalité il n'y a que des sommes simples.

Propriétés :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} (a_{ij}+b_{ij}) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij} + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} b_{ij}$$

Pour un nombre λ quelconque (ne dépendant ni de i, ni de j) ,

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} (\lambda a_{ij}) = \lambda \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij}$$

3. Somme double triangulaire.

On note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ la somme de tous les a_{ij} lorsque i va de 1 à n et j de 1 à n avec la contrainte $i \leqslant j$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) \quad \text{ou} \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)$$

On note aussi (*sans parenthèses*) :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

Formule d'inversion de l'ordre de sommation dans une somme triangulaire :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}}$$

Propriétés :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} b_{ij}$$

Pour un nombre λ quelconque (ne dépendant ni de i, ni de j) ,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (\lambda\, a_{ij}) = \lambda \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$$

4. Somme double triangulaire stricte.

On note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij}$ la somme de tous les a_{ij} lorsque i va de 1 à n et j de 1 à n avec la contrainte $i < j$

$$\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\right)$$

Ou encore avec les conventions sur les sommes :

$$\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\right)$$

On note aussi : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$ ou $\displaystyle\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$

formule d'inversion de l'ordre de sommation dans une somme triangulaire stricte :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}}$$

Propriétés :

$$\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} + \sum_{1< i< j\leqslant n} b_{ij}$$

Pour un nombre λ quelconque (ne dépendant ni de i, ni de j) ,

$$\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} (\lambda\, a_{ij}) = \lambda \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij}$$