Colles de mathématiques - Semaine 8 - du 25/11/24

La colle commencera par une question de cours, puis un exercice simple.

Pour la question de cours : Vérifier que la différence entre définition et théorème est bien comprise.

Pour l'exercice : un calcul de probabilité relativement simple avec variable aléatoire.

On vérifiera la bonne maitrise des deux théorèmes fondamentaux (FPT-FPC).

Et enfin si ces deux obstacles sont passés : des exercices de probabilité moins élémentaires *(il est temps de se mettre au niveau)* sur le programme de première ou de deuxième année.

Les démonstrations de cours classiques sur ce cours pourront être donnés en exercices. *Espérance, variance des lois usuelles,* $V(ax+b)$, *Koenig-Huygens, ...*

- **Probabilités.**

Ensemble des événements sur un ensemble quelconque : Notion de tribu.

Définition des événements $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et propriétés.

Définition d'un système complet d'événements.

Définition d'une probabilité. (*Axiome de σ-additivité*).

Evénements négligeables, presque sûrs et système quasi-complet d'événements.

Formule des probabilités totales. (*avec un système complet ou un système quasi-complet*).

Définition d'une variable aléatoires quelconques.

Définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle quelconque.

Propriétés communes à toutes les fonctions de répartitions.

Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires réelles, de n VAR, d'une suite de VAR.

Lemme de coalition.

- **Variables aléatoires réelles discrètes.**

Définition d'une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$.

Système *quasi*-complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète.

Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

Condition d'existence et définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.

Linéarité. Croissance.

Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète.

Condition d'existence et définition de la variance d'une variable aléatoire discrète, de l'écart-type.

Proposition : $V(aX+b) = a^2\, V(X)$. Formule de Kœnig-Huygens. *(Attention aux conditions d'utilisation)*

Lois usuelles avec $X(\Omega)$ fini : Variable certaine, loi de Bernoulli, uniforme, binomiale. *(Pas hypergéométrique)*

Lois usuelles avec $X(\Omega)$ dénombrable : Loi géométrique, loi de Poisson.

Situations types (*pour la binomiale et la géométrique*). (*bien distinguer la définition et les situations types !!*)

Connaître l'espérance et la variance de ces lois. (*sauf la variance de l'uniforme*)

Invariance temporelle des lois géométriques. *(démonstration à connaître)*

- **Python.**

Simulation des tirages usuelles, estimation des probabilités et des espérances.

Simulation des lois usuelles.

Connaître les spécifications des fonctions suivantes.

```
rd.uniform(a, b)     rd.randint(a, b)     rd.randrange(n)
rd.shuffle(L)        rd.choice(L)         rd.sample(L, n)
```

Simulation d'une loi discrète finie quelconque.

Remarques et exemples de questions de cours :

- Question de cours sur : "Probabilité " et "Variables aléatoires discrètes ".

  Définition d'une probabilité. *(première année et deuxième année)*
  Définition d'un système complet d'événements. *(première année et deuxième année)*
  Définition d'un système quasi-complet d'événements.
  Théorème des probabilités composées.
  Théorème des probabilités totales. *(première année et deuxième année)*
  Définition de l'indépendance de deux événements. de l'indépendance mutuelle de n événements.
  Définition d'une variable aléatoire quelconque. *(première année et deuxième année)*
  Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires quelconques,
  de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires et d'une suite de variables aléatoires.

  Définition de l'espérance d'une variable aléatoire. *(première année et deuxième année)*

  Enoncé du théorème de transfert.

  On pourra vérifier que les élèves comprennent la différence entre :

  Définition des lois usuelles.

  Espérance et variance des lois usuelles.

  Montrer qu'une variable aléatoire discrète admet une espérance, une variance.

  Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète. *(après avoir montré leur existence)*

  Description de la fonction de répartition de la loi géométrique.

- Modélisation usuelle des tirages dans une urne.
- Simulation informatique des tirages usuels.
- Simulation des lois discrètes. (sauf Poisson)

Remarques :

Le cours sur les séries doit pouvoir être mis en oeuvre dans ces chapitres.

Le cours sur les sommes doubles doit pouvoir être mis en oeuvre dans ces chapitres.