Table des matières

1

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Dans ce cours I désigne toujours un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

Définition : (Somme de Riemann)

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I, on définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (S_n) par :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème : **Si** f est continue sur $[a,b]$ **alors** la suite (S_n) converge.

Définition :

On appelle intégrale de f de a à b la limite de (S_n). on note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n$

Remarques :

- Les énoncés précédents sont vrais pour a et b quelconques dans I, ($a < b$, $a > b$ et $a = b$)
- En notant pour k allant de 0 à n, $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, $\underbrace{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{valeur moyenne de } f} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}_{\text{moyenne arithmétique de valeurs de } f}$
- Ce théorème est à la base de la méthode d'approximation dite des rectangles. *(voir feuille_info_6)*
- *Interprétation graphique* :
  L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est l'aire sous la courbe (en unité d'aire).

$$\text{Aire}\Big(\{\ M(x,y) \in \mathcal{P}\ \big|\ a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\ \}\Big) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(u.a)}$$

- En pratique on applique souvent la proposition suivante :

Si $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec f une fonction continue sur $[0,1]$ alors (u_n) converge vers : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Au concours, à la question "Somme de Riemann, définition et convergence" on répond :

Pour f définie sur $[a,b]$, la suite (S_n) définie par $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$ *(Somme de Riemann)*

Si f est continue sur $[a,b]$ **alors** la suite (S_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

2

Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue.

2.1 Relation de Chasles.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a, b, c.
Alors :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Généralisation :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, n un entier non nul et $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ une suite finie d'éléments de I.
$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,dx \;=\; \sum_{k=2}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$$

2.2 Linéarité.

Linéarité :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.
Alors pour tout réel λ et μ :
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Généralisation :

Soient n un entier naturel non nul, $f_1, f_2, \cdots f_n$ des fonctions continues sur un intervalle I, $(a,b) \in I^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\int_a^b f_k(x)\,dx \right)$$

2.3 Croissance de l'intégrale.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur I,

Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de I et si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

En pratique : *Ce n'est pas une équivalence et il ne faut pas oublier le quantificateur :*

On sait que : $\boxed{\forall x \in [a,b],}\quad f(x) \geqslant 0 \qquad \boxed{\text{donc}} \qquad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

Corollaires :

① Soient f et g deux fonctions continues sur I,
Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de I et si $\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant g(x)$ **alors**

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

② Soient f, g et h trois fonctions continues sur I,
Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de I et si $\forall x \in [a,b], \quad h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ **alors**

$$\int_a^b h(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

③ Soit f une fonction continue sur I,
Si a et b sont deux éléments distincts de I et si $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in I, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

alors

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

2.4 Valeur moyenne.

Définition et proposition :

Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I tels que $a < b$
On appelle **valeur moyenne de $\boldsymbol{f}$ sur $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$** le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

La valeur moyenne est une valeur de la fonction f.

2.5 Intégrales et valeurs absolues.

Proposition : (*Inégalité triangulaire*)

Soient f continue sur I, a et b deux réels de I vérifiant $a \leqslant b$.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Proposition :

Soient f continue sur I, a et b deux réels de I.

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,|b-a|$$

Remarques :

- Ici comme la fonction f est continue $\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$ la borne supérieure est atteinte.
- Si M est un majorant de $|f|$ sur I alors $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant M\,|b-a|$

3 Théorème fondamental

3.1 Définition d'une primitive

Définition *(Primitive d'une fonction sur un intervalle)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que F est une primitive de f sur I signifie que :

➊ F est dérivable sur I et ➋ $\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$.

Remarque : "F est $\boxed{\text{une}}$ primitive de f sur I, si et seulement si, f est $\boxed{\text{la}}$ dérivée de F sur I".

3.2 Théorème

Théorème. *(Théorème fondamental de l'analyse)*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I,

si f est continue sur I **alors** la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Illustration dans la feuille Act_17_ter

Conséquences

- Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I.
- Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I

  Pour tout $(a, b) \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

On note en pratique (*plus facile de vérifier sous cette forme la primitive*) :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b$$

3.3 Calcul de primitives.

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I.

Pour trouver une expression $F(x)$ permettant de définir une primitive F de f sur I, il suffit de fixer un élément a quelconque de I et de calculer pour un x quelconque l'intégrale :

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

4 Parité et périodicité.

4.1 Intégrales et parité.

Proposition.

Soient f une fonction continue sur un ensemble D centré en 0 et $a \in D$,

Si f est **paire** et si $[-a, a] \subset D$ alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2 \int_{0}^{a} f(t)\, dt$$

Proposition.

Soient f une fonction continue sur un ensemble D centré en 0 et $a \in D$,

Si f est **impaire** et si $[-a, a] \subset D$ alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$$

Voir feuille_Act_17

4.2 Intégrales et périodicité.

Proposition.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T $(T > 0)$.

❶ pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\, dt = \int_{0}^{T} f(t)\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\, dt$$

❷ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{a}^{a+nT} f(t)\, dt = n \int_{0}^{T} f(t)\, dt$$

Proposition.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T $(T > 0)$.

pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\, dt = \int_{a}^{b} f(t)\, dt$$

Voir feuille_Act_17

5 Positivité stricte.

Théorème :

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$
Si f est continue sur $[a, b]$, $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ **alors** $f = 0$ sur $[a, b]$.

Démonstration.

Corollaire :

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$
Si f est continue sur $[a, b]$, $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, et $f \neq 0$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Illustration graphique.

6 Calculs d'intégrales.

6.1 Intégration par parties.

Théorème :

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = \Big[u(t) \;\; v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt$$

6.2 Intégration par changement de variable.

I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème : *(Changement de variable $x = \varphi(t)$).*

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\varphi : J \to I$ de classe C^1 a et b deux réels de J.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right)\, \varphi'(t)\, dt$$

Proposition. *(Changement de variable affine $x = \alpha t + \beta$).*

Soit α, β deux réels avec $\alpha \neq 0$ et f une fonction telle que $t \mapsto f(\alpha t + \beta)$ est définie sur le segment $[a, b]$.
Si f est continue sur $[\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]$ **alors** :

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt \underset{x=\alpha t+\beta}{=} \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x) \times \frac{1}{\alpha}\, dx \qquad \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\, dx \underset{x=\alpha t+\beta}{=} \int_a^b f(\alpha t + \beta)\, \alpha\, dt$$