Colles de mathématiques - Semaine 10 - du 09/12/24

Pour résumer : Tous les chapitres de probabilité sauf les couples et les variables à densité.

La colle commencera par une question de cours, puis un exercice relativement simple.
Pour la question de cours : Vérifier que la différence entre définition et théorème est bien comprise.
Pour l'exercice : un calcul de probabilité relativement simple avec variable aléatoire.
Et enfin si ces deux obstacles sont passés : des exercices de probabilité moins élémentaires *(il est temps de se mettre au niveau)* sur le programme de première ou de deuxième année.
Les démonstrations de cours classiques sur les deux cours pourront être donnés en exercices.

- **Probabilités.**

  Ensemble des événements sur un ensemble quelconque : Notion de tribu.
  Définition des événements $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et propriétés.
  Définition d'un système complet d'événements.
  Définition d'une probabilité. (*Axiome de σ-additivité*).
  Evénements négligeables, presque sûrs et système quasi-complet d'événements.
  Formule des probabilités totales. (*avec un système complet ou un système quasi-complet*).

- **Variables aléatoires réelles discrètes.**

  Condition d'existence et définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète.
  Linéarité. Croissance.
  Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète.
  Condition d'existence et définition de la variance d'une variable aléatoire discrète, de l'écart-type.
  La variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X.
  Proposition : $V(aX + b) = a^2\,V(X)$. Formule de Kœnig-Huygens. *(Attention aux conditions d'utilisation)*
  Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X+Y$. Généralisation n VAR discrètes indépendantes
  Lois usuelles avec $X(\Omega)$ fini : Variable certaine, loi de Bernoulli, uniforme, binomiale. *(Pas hypergéométrique)*
  Lois usuelles avec $X(\Omega)$ dénombrable : Loi géométrique, loi de Poisson.
  Situations types (*pour la binomiale et la géométrique*). (*bien distinguer la définition et les situations types !!*)
  Connaître l'espérance et la variance de ces lois. (*sauf la variance de l'uniforme*)
  Invariance temporelle des lois géométriques. *(démonstration à connaître)*
  Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. ($n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0{,}1$)
  Nous n'avons pas encore vu les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

- **Maximum, minimum et somme de variables aléatoires discrètes.**

  Loi du maximum ou du minimum de deux variables aléatoires indépendantes.
  Loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes
  (on pourra se restreindre à des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$).
  Loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant des lois de Poisson.
  (Stabilité des lois de Poisson).
  Généralisation au cas de n variables aléatoires suivant une loi de Poisson.
  Lois de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.
  Nous n'avons pas encore vu le cours sur les couples de variables aléatoires.

- **Python.**

  Simulation des tirages usuelles, estimation des probabilités et des espérances.
  Simulation des lois usuelles.
  Simulation d'une loi discrète finie quelconque.
  Connaitre les méthodes Python : `L.append()` `L.pop(i)` `L.remove(a)`

Remarques et exemples de questions de cours :

- Question de cours sur : "Variables aléatoires discrètes ".

  Définition des lois usuelles.

  Espérance et variance des lois usuelles.

  Montrer qu'une variable aléatoire discrète admet une espérance, une variance.

  Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète. *(après avoir montré leur existence)*

  Caractérisation de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

  Caractérisation d'une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.

  Démonstration de la proposition donnant $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ pour X et Y indépendantes.

  (En admettant $E(XY) = E(X)E(Y)$)

  Exercices autour de l'expérience classique du type :

  On lance indéfiniment une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

  On tire indéfiniment dans des urnes qui évoluent (ou pas).

  Description de la fonction de répartition de la loi géométrique.

  Loi du maximum, du minimum ou la somme de deux VAR discrètes indépendantes.

  Stabilité de la loi de Poisson.

- Modélisation usuelle des tirages dans une urne.
- Simulation informatique des tirages usuels.
- Simulation des lois discrètes.

Remarques :

Le cours sur les séries doit pouvoir être mis en oeuvre dans ces chapitres.

Le cours sur les sommes doubles doit pouvoir être mis en oeuvre dans ces chapitres.