1 Applications linéaires.

Dans ce cours E et F désignent deux espaces vectoriels quelconques sur $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1.1 Exemples.

• Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\text{il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

Remarque : Ce sont les seules fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui possèdent la propriété :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

• "Linéarité de l'intégrale".
Soient a et b deux réels tels que $a < b$, on considère l'application : $\begin{array}{ccc} C^0([a, b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \end{array}$

En notant Ψ cette application on a :

$$\forall (f_1, f_2) \in C^0([a, b])^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \Psi(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \Psi(f_1) + \beta \Psi(f_2)$$

• "Linéarité de l'espérance".
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on note $\mathscr{V}$ l'ensemble des variables aléatoires sur Ω,
on considère l'application définie dans le cours de probabilité :

$$\mathbb{E} : \begin{array}{ccc} \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & \mathbb{E}(X) \end{array}$$

Cette application $\mathbb{E}$ vérifie : $\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{V}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha\,\mathbb{E}(X_1) + \beta\,\mathbb{E}(X_2)$

• "Le passage aux coordonnées dans une base est linéaire".
Soit E un espace vectoriel de dimension n et B une base de E, $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Coord}_B(u) \end{array}$

Cette application Coord_B vérifie :

$$\forall (u_1, u_2) \in E^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Coord}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\,\mathrm{Coord}_B(u_1) + \beta\,\mathrm{Coord}_B(u_2)$$

• "Le passage à la dérivée est linéaire".
On considère l'application : $\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$
En notant d cette application on a :

$$\forall (f_1, f_2) \in C^\infty(\mathbb{R})^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad d(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\,d(f_1) + \beta\,d(f_2)$$

• "$X \longmapsto AX$".
Soient p et n deux entiers naturels non nuls et A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
On considère l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

En notant Ψ cette application on a :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \Psi(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha\,\Psi(X_1) + \beta\,\Psi(X_2)$$

1.2 Définitions et vocabulaire.

Définition :

Soit f une application de E dans F.
Dire que f est une application linéaire signifie que :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(u,v)\in E^2,\quad f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$$

Vocabulaire et notations :

- On note : $\boldsymbol{\mathscr{L}(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- (Lorsque $F=\mathbb{K}$). On appelle **forme linéaire** sur E les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
- (Lorsque $F=E$). On appelle **endomorphisme** de E les applications linéaires de E dans E.
- On note $\boldsymbol{\mathscr{L}(E)}$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Les applications linéaires bijectives sont appelées **isomorphismes**.
- Les endomorphismes bijectifs sont appelés **automorphismes**.
- On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. *(Groupe Linéaire)*

Des cas particuliers importants.

L'application nulle de E dans F est linéaire.
L'application identité de E est un endomorphisme de E. (*c'est même un isomorphisme*)
L'application Coord_B définie dans le cours sur les espaces vectoriels est un isomorphime.

Autres exemples dans la feuille Cours_6.

1.3 Propriétés.

Propositions :

❶ Si f est linéaire de E dans F, on a alors : $f(0_E)=0_F$

❷ Si f est linéaire de E dans F,

pour tout $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, $\displaystyle f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$

Démonstration : *feuille Cours_6*

Remarque :

Pour démontrer qu'une application de E dans F **n'est pas linéaire**, on montre au choix :

❶ $f(0_E)\neq 0_F$

❷ En prenant $\alpha=$.......... dans $\mathbb{K}$ et $u=$.......... dans E, on a $f(\alpha u)\neq\alpha f(u)$

❸ En prenant $u=$.......... dans E et $v=$.......... dans E, on a $f(u+v)\neq f(u)+f(v)$

Exemples dans la feuille Cours_6.

2 Opérations et applications linéaires.

2.1 Combinaison linéaire.

Des précisions sur l'espace vectoriel F^E où E et F désignent deux espaces vectoriels.

Définition :

Pour f une application E dans F et α un scalaire on définit les applications :

$$\alpha f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \alpha f(u) \end{array} \qquad f+g: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f(u)+g(u) \end{array}$$

Remarques :

- On admet que F^E muni de ces deux lois est un espace vectoriel.
- Le vecteur nul de F^E est la fonction nulle, plus précisément c'est l'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & 0_F \end{array}$

Théorème :

Soient f et g deux applications de E dans F,
Si f et g sont dans $\mathscr{L}(E,F)$ et α et β deux scalaires alors $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E,F)$.

Démonstration :

Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$, on note $h = \alpha f + \beta g$,
Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u,v) \in E^2$,

$$\begin{array}{rcll} h(\lambda u + \mu v) & = & \alpha f(\lambda u + \mu v) + \beta g(\lambda u + \mu v) & \textit{(Définitions des opérations ci-dessus)} \\ & = & \alpha\lambda f(u) + \alpha\mu f(v) + \beta\lambda g(u) + \beta\mu g(v) & \textit{(f et g sont linéaires)} \\ & = & \lambda(\alpha f(u) + \beta g(u)) + \mu(\alpha f(v) + \beta g(v)) & \\ & = & \lambda h(u) + \mu h(v) & \end{array}$$

donc $h = \alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E,F)$

On a bien démontré que : $\boxed{\text{si } f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } g \in \mathscr{L}(E,F) \text{ alors } \alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E,F)}$

Remarques :

- Le vecteur nul étant l'application nulle de E dans F, $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

- Plus généralement : Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

$$\text{Si} \quad \text{pour tout } k \in [\![1;n]\!],\ \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ et } f_k \in \mathscr{L}(E,F) \quad \text{alors} \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \in \mathscr{L}(E,F)$$

2.2 Composition.

Théorème :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $f: E \to F$ et $g: F \to G$.
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ **alors** $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Démonstration :
On suppose $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$,
Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u,v) \in E^2$,

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha u + \beta v) &= g(\alpha f(u) + \beta f(v)) && \text{car } f \in \mathscr{L}(E,F) \\ &= \alpha\, g(f(u)) + \beta\, g(f(v)) && \text{car } g \in \mathscr{L}(F,G) \\ &= \alpha\, g \circ f(u) + \beta\, g \circ f(v) \end{aligned}$$

donc $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Remarque : Plus généralement : Toute composée d'applications linéaires est une application linéaire.

Propriétés :

❶ **Si** $g \in \mathscr{L}(F,G)$, $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, $f_1 \in \mathscr{L}(E,F)$ $f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$

alors $g \circ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1\ g \circ f_1 + \alpha_2\ g \circ f_2$

❷ **Si** $g \in \mathscr{L}(E,F)$, $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, $f_1 \in \mathscr{L}(F,G)$ $f_2 \in \mathscr{L}(F,G)$

alors $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \circ g = \alpha_1\ f_1 \circ g + \alpha_2\ f_2 \circ g$

Démonstration :

2.3 Puissance d'un endomorphisme

Définition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la notation f^n par la relation de récurrence :

$$f^0 = Id_E \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = f^n \circ f$$

Plus simplement : $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ applications}}$

Théorème :

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f: E \to F$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ **alors** $f^n \in \mathscr{L}(E,F)$

Propriétés :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$,
pour tout $(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2$, $f^{n_1+n_2} = f^{n_1} \circ f^{n_2}$ et $(f^{n_1})^{n_2} = f^{n_1 n_2}$

2.4 Réciproque d'un isomorphisme.

Théorème :

La réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

Démonstration :
On suppose connaître f une application linéaire bijective de E dans F
Soient $(v_1, v_2) \in F^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{F}^2$,
comme f est bijective on peut définir $u_1 = f^{-1}(v_1)$ et $u_2 = f^{-1}(v_2)$,
ce qui nous donne : $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= f^{-1}(\alpha_1 f(u_1) \alpha_2 f(u_2)) \\ &= f^{-1}\big(f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)\big) \qquad \textit{car } f \textit{ est linéaire} \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \qquad \textit{car } f^{-1} \circ f = Id_E \\ &= \alpha_1 f^{-1}(v_1) + \alpha_2 f^{-1}(v_2) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration

Autrement dit sachant que la réciproque d'une bijection est une bijection :

Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Remarque : Si f est un automorphisme alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^{-n} l'automorphisme $\left(f^{-1}\right)^n$

3

Noyau et Image.

3.1 Définitions.

Définition :

Etant donné une application linéaire $f : E \to F$, on appelle :

- **noyau de f**, le sous-ensemble de E suivant : $\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$
- **image de f**, le sous-ensemble de F suivant : $\mathrm{Im}(f) = \{\ f(u) \mid u \in E\}$

Remarques :

- $\ker(f) \subset E$ et $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
- $\ker(f)$ est l'ensemble des antécédents de 0_F par f. $\mathrm{Im}(f)$ est l'image directe de E par f.
- $\mathrm{Im}(f) = \{\ v \in F \mid \exists u \in E :\ f(u) = v\ \}$
- Si f est l'application nulle alors $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ et $\ker(f) = E$.
- Si f est l'application identité de E alors $\mathrm{Im}(f) = E$ et $\ker(f) = \{0_E\}$.

3.2 Propriétés.

Théorème :

Si f est une application linéaire de E dans F alors :

❶ $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E ❷ $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstrations :

❶ • $\ker(f) \subset E$,

• $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \ker(f)$

• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in \ker(f)^2$,

$$\begin{array}{rcll} f(\alpha u + \beta v) & = & \alpha f(u) + \beta f(v) & \text{car } f \in \mathscr{L}(E, F) \\ & = & \alpha 0_F + \beta 0_F & \text{car } u, v \in \ker(f) \\ & = & 0_F & \end{array}$$

donc $\alpha u + \beta v \in \ker(f)$

En conclusion : $\boxed{\ker(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

❷ • $\mathrm{Im}(f) \subset F$,

• $0_F = f(0_E)$ donc $0_F \in \mathrm{Im}(f)$

• Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(v_1, v_2) \in \mathrm{Im}(f)^2$,

on note $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$ avec $u_1, u_2 \in E$,

$$\begin{array}{rcll} \alpha v_1 + \beta v_2 & = & \alpha f(u_1) + \beta f(u_2) & \\ & = & f(\alpha u_1 + \beta u_2) & \text{car } f \in \mathscr{L}(E, F) \\ & \in & \mathrm{Im}(f) & \end{array}$$

En conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } F}$

3.3 Image et surjectivité.

Proposition : $\boxed{\text{Pour } f \in \mathcal{L}(E,F), \quad f \text{ est surjective si, et seulement si, } \mathrm{Im}(f) = F.}$

Proposition :

$$\boxed{\text{Soit } f \in \mathcal{L}(E,F), \qquad \text{Si } (e_1, \cdots, e_n) \text{ est une base de } E \text{ alors,} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)).}$$

Démonstration 1 : *(faite en classe)*
Raisonnons par double inclusion

$\boxed{\supset}$ Sachant que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Im}(f)$ et que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, on a bien $\mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \subset \mathrm{Im}(f)$

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, on note $y = f(x)$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

comme f est linéaire, il vient $y = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, et ainsi $y \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$

on a bien $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$

En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))}$$

Démonstration 2 : *Une autre démonstration plus efficace mais moins élémentaire.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{ f(u) \mid u \in E \} \\
&= \left\{ f\left(\sum_{k=1}^{n} x_i e_i\right) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_i f(e_i) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \qquad \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\
&= \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))
\end{aligned}$$

3.4 Noyau et injectivité.

$\boxed{\textbf{Théorème :}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ une application linéaire de } E \text{ dans } F, \\ \qquad f \text{ est injective si, et seulement si, } \ker(f) = \{ 0_E \} \end{array}}$$

Démonstration 1 *(Faite au tableau)*

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective.

Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned}
x \in \ker(f) &\iff f(x) = 0_F \\
&\iff f(x) = f(0_E) \\
&\iff x = 0_E \qquad \textit{(car } f \textit{ est injective)}
\end{aligned}$$

donc $\ker(f) = \{0_E\}$ ■.

Remarque : au tableau, nous n'avons pas fait un raisonnement par équivalence.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$,

on a alors : $f(x_1) - f(x_2) = 0_F$, et comme f est linéaire il vient $f(x_1 - x_2) = 0_F$

d'où $(x_1 - x_2) \in \ker(f)$ et en utilisant l'hypothèse $\ker(f) = \{0_E\}$ il vient $x_1 - x_2 = 0_E$

ou encore $x_1 = x_2$.

donc f est injective ■.

Démonstration 2
Une autre approche par équivalence : *(ce n'est pas la démonstration "classique" que j'ai faite au tableau.)*

$$\begin{aligned}
f \text{ est injective} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big[\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u) = f(v) \iff u = v\Big] \\
&\Longleftrightarrow \quad \Big[\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u) - f(v) = 0_F \iff u = v\Big] \\
&\Longleftrightarrow \quad \Big[\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u - v) = 0_F \iff u - v = 0_E\Big] \qquad \text{car } f \text{ linéaire} \\
&\Longleftrightarrow \quad \Big[\forall u \in E, \quad f(u) = 0_F \iff u = 0_E\Big] \\
&\Longleftrightarrow \quad \Big[\forall u \in E, \quad u \in \ker(f) \iff u = 0_E\Big] \\
&\Longleftrightarrow \quad \ker(f) = \{0_E\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est injective \ si, et seulement si, } \ker(f) = \{0_E\}}$$

4

Image d'une base.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de **dimension finie.**

Théorème :

> Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E ,
> quel que soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire f de E dans F vérifiant :
>
> $$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad f(e_i) = v_i$$

Autrement dit : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base.
Extrait du programmme : "Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base."

Démonstration : *(ce qui a été fait au tableau)*

Idée : Comme f est linéaire alors si $u = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$ alors $f(u) = \sum_{k=1}^{n} x_i f(e_i)$

La seule connaissance des coordonnées de u et les $f(e_i)$ permet de calculer $f(u)$.

Existence : L'application suivante convient : *(ie : elle est linéaire et vérifie $\forall i \ f(e_i) = v_i$)*

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i v_i \qquad \text{où} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}$$

Au tableau j'ai défini $\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i f(e_i) \end{array}$ *c'est une autre approche mais c'est peut-être plus simple avec les v_i.*

Unicité : Supposons connaître deux applications f_1 et f_2 qui conviennent.
(ie : elles sont linéaires et vérifient $\forall i \ f(e_i) = v_i$)

Soit $u \in E$, on note $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$\begin{array}{rcll} f_1(u) & = & f_1\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f_1(e_i) & \text{car } f_1 \in \mathscr{L}(E,F) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f_2(e_i) & \text{car } f_1(e_i) = f_2(e_i) = v_i \\ & = & f_2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) & \text{car } f_2 \in \mathscr{L}(E,F) \\ & = & f_2(u) & \end{array}$$

Donc $\quad \forall u \in E, \quad f_1(u) = f_2(u) \quad$ donc $\quad f_1 = f_2$ ■

Remarque :
Cette partie de la démonstration a été présentée différemment au tableau, seule la présentation est différente.

Théorème :

> Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.
>
> f est bijective si, et seulement si, l'image par f de la base $\mathscr{B}$ est une base de F.

Démonstration :
On note $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ et on désigne alors par $f(\mathscr{B})$ la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$

Montrons séparément :

❶ f injective $\iff$ $f(\mathscr{B})$ est libre et ❷ f surjective $\iff$ $f(\mathscr{B})$ est génératrice de F.

Démo de ❶ *(je fais comme au tableau mais on peut aussi faire une double implication)*

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \ker(f) = \{0_E\} \\ &\iff \forall u \in E, \quad f(u) = 0_F \iff u = 0_E \\ &\iff \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} x_i e_i\right) = 0_F \iff \sum_{k=1}^{n} x_i e_i = 0_E \\ &\iff \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_i f(e_i) = 0_F}_{\textit{car } f \textit{ est linéaire}} \iff \underbrace{\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0}_{\textit{car } (e_1, ..., e_n) \textit{ est libre}} \end{aligned}$$

On retrouve la définition de la liberté de $f(\mathscr{B})$.

f est injective si, et seulement si, $f(\mathscr{B})$ est libre

Démo de ❷ *(Ici je suis plus efficace qu'au tableau en utilisant le résultat important donnant* $\operatorname{Im}(f) = \text{Vect}(f(B))$ *)*

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\iff \operatorname{Im}(f) = F \\ &\iff \operatorname{Vect}(f(B)) = F \end{aligned}$$

f est surjective si, et seulement si, $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de F

En conclusion :

$\boxed{f \text{ est bijective si, et seulement si, } f(\mathscr{B}) \text{ est une base de } F}$

Conséquence :

> Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E un espace de dimension finie.
>
> Si f est bijective alors F est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

En effet : On vient de montrer que si f est bijective alors $f(\mathscr{B})$ est une base de F.
Or le nombre de vecteurs de $f(\mathscr{B})$ est égal à $\dim(E)$ donc $\dim(E) = \dim(F)$.

Théorème : (*Quand E et F ont la même dimension*)

> Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$.
> ❶ f est injective si, et seulement si, f est bijective.
> ❷ f est surjective si, et seulement si, f est bijective.

Démonstration : *(Il suffit de montrer : f est injective $\iff$ f est surjective)*

On suppose que $\dim(E) = \dim(F) = n$, on sait donc que $f(\mathscr{B})$ possède n vecteurs.

On utilise deux fois la propriété fondamentale (noté $(*)$) :

"Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre (ou génératrice) de n vecteurs est une base".

$$\begin{array}{lcll} f \text{ est injective} & \iff & f(\mathscr{B}) \text{ est une famille libre} & \textit{(vue dans la démonstration du th. précédent)} \\ & & (*) \ \Updownarrow & \\ & \iff & f(\mathscr{B}) \text{ est une base de } F & \\ & & (*) \ \Updownarrow & \\ & \iff & f(\mathscr{B}) \text{ est une famille génératrice de } F & \\ & \iff & f \text{ est surjective} & \textit{(vue dans la démonstration du th. précédent)} \end{array}$$

En conclusion : Lorsque dim(E) =dim(F) on a

$$\boxed{f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \quad \text{et} \quad f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective})}$$

En pratique :

- quand $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que f est injective pour montrer qu'elle est bijective.
- quand $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que f est surjective pour montrer qu'elle est bijective.

Théorème : *En particulier et le plus utile en pratique.*

Soit E un espace de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ *(un endomorphisme de E).*

❶ f est injective si, et seulement si, f est bijective.

❷ f est surjective si, et seulement si, f est bijective.

En effet : C'est juste un cas particulier du théorème précédent dans le cas $F = E$.

Remarque : Attention ce théorème est faux en dimension infinie comme le montre les 2 exemples suivants.

\- L'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$ est injective, mais non surjective.

En effet :

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{array}{rcll} P \in \ker(f) & \iff & f(P) = 0_{R[X]} & \\ & \iff & XP = 0_{R[X]} & \\ & \iff & P = 0_{R[X]} & \textit{intégrité car } X \neq 0_{R[X]} \end{array}$$

donc $\ker(f) = \{0_{R[X]}\}$ et ainsi $\boxed{f \text{ est injective}}$

- 1 n'a pas d'antécédent par f, en effet si $XP = 1$ on aurait $0 = 1$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$

\- L'application linéaire $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est surjective, mais non injective.

En effet :

- Pour $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$,

en prenant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ on a $g(P) = Q$ donc tout élément de $\mathbb{R}[X]$ admet un antécédent par g,

$$\boxed{g \text{ est surjective}}$$

- $g(1) = 0_{R[X]}$ donc $\text{Ker}(g) \neq \{0_{R[X]}\}$ et ainsi $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$

Cette dernière remarque est difficile pour un élève de BCPST car on fait essentiellement des exercices en dimension finie. A vous de montrer que vous êtes capable de retenir ces parties du cours, je vous assure c'est possible vous pouvez le faire.

5 Représentation matricielle.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie.

On notera si nécessaire : $p = \dim(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E,
$n = \dim(F)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base de F.

5.1 Introduction.

Soit f une application linéaire de E dans F.

Pour $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k e_k \in E$, comme f est linéaire on obtient : $f(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k f(e_k)$ et en appliquant $\text{Coord}_{\mathscr{B}'}$ qui est aussi linéaire il vient : $\text{Coord}_{\mathscr{B}'}\big(f(u)\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k \text{Coord}_{\mathscr{B}'}\big(f(e_k)\big)$

Ce qui donne *(Raisonnement déjà vu : $AX = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i C_i$)* :

$$\text{Coord}_{\mathscr{B}'}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_1)) & \cdots & \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_j)) & \cdots & \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_p)) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

5.2 Matrice d'une application linéaire.

Définition

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$,
on appelle **matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** la matrice (notée : $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$)

$$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \qquad \text{ou encore} \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B}))$$

Remarques :

- La matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ dépend du choix des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
- On dit que la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ représente f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
- Lorsque f est un endomorphisme de E et que $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ on note : $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
- La matrice de l'application nulle est la matrice nulle.

Illustration permettant de retenir la définition.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{ccccc} \underbrace{f(e_1)} & & \underbrace{f(e_j)} & & \underbrace{f(e_p)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}}^{f(\mathscr{B})} \\ \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = & \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} \to e'_1 \\ \vdots \\ \to e'_i \\ \vdots \\ \to e'_n \end{array}\right\} \mathscr{B}' \end{array}$$

Théorème :

Pour $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F *(deux bases fixées)* l'application $f \longmapsto \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est une bijection de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

En effet : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'un base.

Remarques :

❶ Pour montrer que $f = g$, il suffit de montrer que pour des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ quelconques,

$$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$$

❷ On peut définir une application linéaire en donnant sa matrice dans deux bases quelconques.

Théorème : *(Théorème très utilisé dans ce cours, plus rarement en exercice)* On le notera "**Théorème (∗)**"

Soient $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F et f une application linéaire de E dans F, $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est l'unique matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\,\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

En effet : *(Fait au tableau)*

• On a vu dans l'introduction que $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ convient

• Si A_1 et A_2 conviennent alors $\forall u \in E$, $A_1\,\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = A_2\,\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$ donc $\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $A_1X = A_2X$
En prenant X_1, ... , X_p la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}$ on montre que A_1 et A_2 ont les mêmes colonnes donc $A_1 = A_2$.
(d'où l'unicité.)

Dans la suite de ce cours on utilisera **Théorème (∗)** sous la forme :
Si on trouve une matrice A vérifiant $\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\,\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$
alors on pourra affirmer que $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = A$

Relation importante : Pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F

$$\boxed{\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\,\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)}$$

Avec son corollaire plus couramment utilisé : Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ une base de E

$$\boxed{\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathscr{B}}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\,\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)}$$

5.3 Matrices et opérations.

5.3.1 Matrice d'une combinaison de deux applications linéaires.

Théorème

Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F, Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ on a : $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\alpha f + \beta g) = \alpha\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \beta\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$

En effet : $\forall u \in E$,
$$\begin{aligned}\text{Coord}_{\mathscr{B}'}((\alpha f + \beta g)(u)) &= \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(\alpha f(u) + \beta g(u))\\ &= \alpha\text{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) + \beta\text{Coord}_{\mathscr{B}'}(g(u))\\ &= \alpha\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u) + \beta\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)\\ &= \underbrace{\Big(\alpha\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \beta\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)\Big)}_{\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\alpha f+\beta g)}\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)\end{aligned}$$

En utilisant le **Théorème (∗)** il vient : $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\alpha f + \beta g) = \alpha\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \beta\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$

Conqéquence :

> Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F,
> l'application $f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

En effet : *On vient de démontrer qu'elle est linéaire et un peu plus haut on a vu qu'elle est bijective.*

5.3.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires.

Théorème

> Soient $\mathscr{B}_1$ une base de E, $\mathscr{B}_2$ une base de F et $\mathscr{B}_3$ une base de G,
>
> Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$

Démonstration :

$$\textbf{En effet : } \quad \forall u \in E, \quad \begin{aligned} \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_3}(g(f(u))) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g)\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_2}(f(u)) \\ &= \underbrace{\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)\Big)}_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}(g\circ f)}\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_1}(u) \end{aligned}$$

En utilisant le **Théorème (∗)** il vient : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$

Corollaire *(trois endomorphismes et quatre bases)*

> Soient $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_4$ quatre bases de E.
>
> $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_4}(h \circ g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(h)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$$

En effet :

Corollaire *(Puissance d'un endomorphisme avec une seule base).*

> Pour f un endomorphisme de E, m un entier naturel et $\mathscr{B}$ une base de E,
>
> $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^m) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^m$$

En effet :

5.3.3 Matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective.

Théorème

> Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et f une application linéaire de E dans F.
>
> f est bijective si, seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est inversible
>
> et alors :
> $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))^{-1}$$

Démonstration :

- Supposons que $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.
  Prenons une vecteur v de F et cherchons ses antécédents par f :
  Pour $u \in E$,

$$\begin{aligned} f(u) = v \quad &\Longleftrightarrow \quad Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Coord}_{\mathscr{C}}(v) \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)^{-1}\mathrm{Coord}_{\mathscr{C}}(v) \\ &\Longleftrightarrow \quad u = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}^{-1}\left(Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)^{-1}\mathrm{Coord}_{\mathscr{C}}(v)\right) \end{aligned}$$

Tout élément de F admet un unique antécédent par f, donc f est une bijection ■

• Supposons que f est une bijection,

- En utilisant le théorème 1, on sait que $f(\mathcal{B})$ est une base de F et ainsi dim(E) =dim(F) donc $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *(matrice carrée)*
- On a aussi vu que f^{-1} est linéaire. *(Voir ci-dessous)*
- En utilisant le résultat de la question 2) :

$$\begin{array}{rcl} Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) & = & Mat_{\mathscr{C}}(f \circ f^{-1}) \\ & = & Mat_{\mathscr{C}}(Id_F) \\ & = & I_n \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) & = & Mat_{\mathscr{B}}(f^{-1} \circ f) \\ & = & Mat_{\mathscr{B}}(Id_E) \\ & = & I_n \end{array}$$

on peut en conclure que $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible et que $\left(Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$ ■

Ce qui achève la démonstration de :

$$\text{f est bijective si, seulement si, } Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \text{ est inversible}$$

6

Isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Définition.

Soient E et F deux espaces vectoriels,
Dire que E et F sont isomorphes signifie qu'il existe un isomorphisme de E dans F.

Théorème.

Pour n un entier naturel non nul,
tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Conséquence.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie,
E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

Remarque dans ce cours on utilise l'isomorphisme "coordonnées" une fois une base de E choisie.

Théorème :

Soient E un espace de dimension finie et $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E.
Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors
l'application $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ v & \longmapsto & \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(v) \end{array}$ est un isomorphisme.

Démonstration : *(Vue dans le cours sur les espaces vectoriels)*

Théorème :

Soient E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E et u_1, ... u_n des vecteurs de E.

❶ Pour tout $v \in E$,

$$v \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \iff \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n))$$

❷

$(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si, et seulement si, $(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n))$ est libre.

❸

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{rg}(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n)).$$

Démonstration.

7 Rang d'une application linéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.

7.1 Définition.

Définition :

Soit f une application linéaire de E dans F,
on appelle rang de l'application linéaire f l'entier naturel noté $\mathrm{rg}(f)$ et défini par :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

7.2 Lien avec les autres notions de rang.

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f) &= \dim(\mathrm{Im}(f)) \\
&= \dim(\mathrm{Vect}\langle f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\rangle) \\
&= \mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)) \\
&= \mathrm{rg}(\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_1)), \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_2)), \ldots, \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_p))) \\
&= \mathrm{rg}(Mat_{\mathscr{B}'}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))) \\
&= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))
\end{aligned}$$

7.3 Théorème du rang

Théorème :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque

$$\forall f \in \mathscr{L}(E, F), \qquad \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

Démonstration : *Ex 4 de la feuille Cours_6_3.*

7.4 Caractérisation des isomorphimes

Théorème :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$

f est bijective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = n$

En effet :

8

Une matrice vue comme une application linéaire.

Ici n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

8.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Définition.

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle application canoniquement associée à M, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$$

Propriété

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application : $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$ est linéaire.

Démonstration : *Voir feuille cours_cours_6_quinquies.*

En notant : $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{B}'$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ $(\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))$ est égale à M .

8.2 Noyau, image.

Définition :

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit le noyau et l'image de M par :

$$\ker(M) = \left\{ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; MX = 0 \right\} \qquad \mathrm{Im}(M) = \left\{ \; MX \;\middle|\; X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \right\}$$

Remarques :

• En notant f : $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$ on a : $\ker(M) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(f)$

• $\ker(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $\mathrm{Im}(M) = \left\{ \; M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \;\middle|\; (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$

• $\ker(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$ sont des espaces de matrices colonnes. $\ker(M) \subset \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Im}(M) \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

• Pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $Y \in \mathrm{Im}(M) \iff \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) : \; Y = MX$

• Le plus souvent pour déterminer une base de $\ker(M)$ on résout le système homogène $MX = 0$.

(Méthode du pivot sur les lignes)

• Le plus souvent pour déterminer une base Im(M) on utilise Im(M) =Vect($\underbrace{C_1 \ , \ \ldots \ , \ C_p}_{\text{Le colonnes de } M}$) et ensuite :

❶ On utilise les relations entre les colonnes données par l'étude du noyau pour supprimer des colonnes.
ou
❷ On utilise la méthode du pivot sur les colonnes de M.
ou
❸ On connait la dimension m avec le théorème du rang et on trouve une famille libre de m vecteurs de Im(M).

Proposition :

Lien entre noyau et image d'une matrice et d'une application linéaire représentée par cette matrice dans des bases.

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F :

$$\forall u \in E, \quad u \in \ker(f) \iff \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) \in \ker(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))$$

$$\forall v \in F, \quad v \in \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(v) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))$$

Exemples :

1. Soit Δ l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P(X)$ associe $P(X+1) - P(X-1)$.
(on ne démontera pas que Δ est bien linéaire).
Déterminer une base du noyau et une base de l'image de Δ.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $P(X)$ associe $(P(0), P(1), P(2))$.
(on ne démontera pas que f est bien linéaire).
Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

8.3 Rang d'une matrice.

Définition : Le rang de M est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de M

C'est le rang de l'application linéaire : $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$

Dans l'algorithme du pivot de Gauss pour la résolution du système homogène $MX = 0$:
(système n équations, p inconnues)

- rg(M) est le nombre d'inconnues principales, (*ou encore le nombre de pivots*)
- dim(ker(M)) est le nombre d'inconnues secondaires,

Théorème :

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\quad \dim(\mathrm{Im}(M)) + \dim(\ker(M)) = p$

En effet :

Attention : p est le nombre de colonnes de M.

Corollaire :

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\quad \dim(\mathrm{Im}(M)) + \dim(\ker(M)) = n$

8.4 Inverse à gauche, inverse à droite.

Théorème.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées, $\quad AB = I_n \iff BA = I_n$

Démonstration : *(Il suffit de montrer une deux implications).*

9

Changement de base.

9.1 Matrice de passage.

Définition et notation

> Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E,
> la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est appelée matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on la note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$

Remarques :

❶ Quand on donne une nouvelle base $\mathscr{B}'$, on donne la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

La matrice des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne.

❷ Pour les démonstrations on pourra utiliser la remarque $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$

Exemples : *Voir Feuille_Cours_6_5*

Propriétés.

> Quelles que soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\quad P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n \quad$ et $\quad {P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$

Démonstration.

Remarque : Toute matrice inversible est la matrice de passage entre deux bases bien choisies.

Propriétés. *(Complément)*

> Quelles que soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E, $\quad P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}$

Démonstration.

9.2 Changement de bases, action sur les coordonnées d'un vecteur.

Théorème

> Quelles que soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\quad \forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(u)$

En effet $u = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k$ donc $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{k=1}^{n} x'_k \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(e'_k) = Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(u)$

■

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(u)$$

Remarques :

- en notant : $X = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$, $X' = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$

$$X = PX' \qquad X' = P^{-1}X$$

- Certains trouvent le nom "matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ contre-intuitif.

en effet : pour passer de X à X' on applique $X \longmapsto P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}X$

Exemples : *Voir Feuille_Cours_6_5*

9.3 Changement de bases, action sur la matrice d'un endomorphisme.

Théorème

> Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
>
> $$\forall f \in \mathscr{L}(E) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

En effet : Pour $u \in E$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(f(u)) \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) \\ \forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) &= \underbrace{P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)}\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(u) \end{aligned}$$

Ici il faut se rappeler que :

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est l'unique matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

• Il y a plusieurs démonstration de cette formule, mais à la fin il faut trouver un moyen de la retenir .

$$\mathrm{Mat}_{\color{green}{\mathscr{B}'}}(f) = P_{\color{green}{\mathscr{B}'},\color{red}{\mathscr{B}}}\mathrm{Mat}_{\color{red}{\mathscr{B}}}(f)\, P_{\color{red}{\mathscr{B}},\color{green}{\mathscr{B}'}}$$

• Si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ alors :

$$M' = P^{-1}MP$$

et

$$M = PM'P^{-1}$$

Remarque : (*Plus compréhensible après le chapitre sur la* ***diagonalisation***).

On passe souvent d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la matrice $M' = \Delta$ est plus simple *(diagonale ou triangulaire)*.

on a alors avec la formule du changement de base en notant $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$:

$$\Delta = P^{-1}MP$$

on en déduit la relation :

$$M = P\Delta P^{-1}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{A = PDP^{-1}}.$$

10

Matrices semblables

Dans ce paragraphe toutes les matrices sont carrées.

Définition :

Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

dire que M est semblable à N signifie qu'il existe une matrice P inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M = P^{-1}NP$$

Exemple et contre exemple.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Attention : une telle matrice P n'est pas unique.

En effet :

Proposition

1. M est semblable à M. *(réflexif)*
2. Si M est semblable à N alors N est semblable à M. *(symétrique)*
3. Si M_1 est semblable à M_2 et M_2 est semblable à M_3 alors M_1 est semblable à M_3. *(transitive)*

Démonstration.

Caractérisation.

Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

M et N sont semblables si, et seulement si,

elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases.

Démonstration.

Autrement dit :

Deux matrices M et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, :
pour un espace E de dimension n, un endomorphisme f de E et deux bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ de E, on a :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \qquad \text{et} \qquad N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

M et N représentent le même endomorphisme dans deux bases.

Théorème :

Si deux matrices M et N sont semblables avec pour P inversible la relation $N = P^{-1}MP$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad N^n = P^{-1}M^nP$$

Démonstration. *voir feuille Cours_6_5 Ex 5*

Remarques :

- si M et N sont semblables alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n et N^n le sont aussi.
- On utilise les matrices semblables pour calculer les puissances de matrice.

Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

M est semblable à λI_n si, et seulement si, $M = \lambda I_n$.

En effet :

Théorème : *(complément)*

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Si A et B sont semblables alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Démonstration. *voir feuille Cours_6_5 Ex 10*

Remarque : La réciproque est fausse, *voir feuille Cours_6_5 Ex 9*

Théorème : *(complément)*

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Si A et B sont semblables alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Démonstration. *voir feuille Cours_6_5 Ex 6*