

Table des matières

1 Applications linéaires.	2
1.1 Exemples.	2
1.2 Définitions et vocabulaire.	3
1.3 Propriétés.	3
2 Opérations et applications linéaires.	4
2.1 Combinaison linéaire.	4
2.2 Composition.	5
2.3 Puissance d'un endomorphisme	5
2.4 Réciproque d'un isomorphisme.	6
3 Noyau et Image.	7
3.1 Définitions.	7
3.2 Propriétés.	7
3.3 Image et surjectivité.	8
3.4 Noyau et injectivité.	8
4 Image d'une base.	10
5 Représentation matricielle.	13
5.1 Introduction.	13
5.2 Matrice d'une application linéaire.	13
5.3 Matrices et opérations.	14
5.3.1 Matrice d'une combinaison de deux applications linéaires.	14
5.3.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires.	15
5.3.3 Matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective.	15
6 Isomorphe à \mathbf{K}^n.	17
7 Rang d'une application linéaire.	18
7.1 Définition.	18
7.2 Lien avec les autres notions de rang.	18
7.3 Théorème du rang	18
7.4 Caractérisation des isomorphismes	18
8 Une matrice vue comme une application linéaire.	19
8.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	19
8.2 Noyau, image.	19
8.3 Rang d'une matrice.	20
8.4 Inverse à gauche, inverse à droite.	20
9 Changement de base.	21
9.1 Matrice de passage.	21
9.2 Changement de bases, action sur les coordonnées d'un vecteur.	21
9.3 Changement de bases, action sur la matrice d'un endomorphisme.	22
10 Matrices semblables	23

Applications linéaires.

Dans ce cours E et F désignent deux espaces vectoriels quelconques sur \mathbb{K} . ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

1.1 Exemples.

- Les applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

Remarque : Ce sont les seules fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui possèdent la propriété :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

- "Linéarité de l'intégrale".

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, on considère l'application : $C^0([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \int_a^b f(t) dt$$

En notant Ψ cette application on a :

$$\forall (f_1, f_2) \in C^0([a, b])^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \Psi(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \Psi(f_1) + \beta \Psi(f_2)$$

- "Linéarité de l'espérance".

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on note \mathcal{V} l'ensemble des variables aléatoires sur Ω , on considère l'application définie dans le cours de probabilité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Cette application \mathbb{E} vérifie : $\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{V}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha \mathbb{E}(X_1) + \beta \mathbb{E}(X_2)$

- "Le passage aux coordonnées dans une base est linéaire".

Soit E un espace vectoriel de dimension n et B une base de E , $E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$u \longmapsto \text{Coord}_B(u)$$

Cette application Coord_B vérifie :

$$\forall (u_1, u_2) \in E^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{Coord}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha \text{Coord}_B(u_1) + \beta \text{Coord}_B(u_2)$$

- "Le passage à la dérivée est linéaire".

On considère l'application : $C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$

$$f \longmapsto f'$$

En notant d cette application on a :

$$\forall (f_1, f_2) \in C^\infty(\mathbb{R})^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad d(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha d(f_1) + \beta d(f_2)$$

- " $X \longmapsto AX$ ".

Soient p et n deux entiers naturels non nuls et A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

En notant Ψ cette application on a :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \Psi(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha \Psi(X_1) + \beta \Psi(X_2)$$

1.2 Définitions et vocabulaire.

Définition :

Soit f une application de E dans F .

Dire que f est une application linéaire signifie que :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(u, v) \in E^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Vocabulaire et notations :

- On note : $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- (Lorsque $F = \mathbb{K}$). On appelle **forme linéaire** sur E les applications linéaires de E dans \mathbb{K} .
- (Lorsque $F = E$). On appelle **endomorphisme** de E les applications linéaires de E dans E .
- On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- Les applications linéaires bijectives sont appelées **isomorphismes**.
- Les endomorphismes bijectifs sont appelés **automorphismes**.
- On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E . (*Groupe Linéaire*)

Des cas particuliers importants.

L'application nulle de E dans F est linéaire.

L'application identité de E est un endomorphisme de E . (*c'est même un isomorphisme*)

L'application Coord_B définie dans le cours sur les espaces vectoriels est un isomorphisme.

Autres exemples dans la feuille Cours_6.

1.3 Propriétés.

Propositions :

❶ Si f est linéaire de E dans F , on a alors : $f(0_E) = 0_F$

❷ Si f est linéaire de E dans F ,

$$\text{pour tout } (u_1, \dots, u_n) \in E^n \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$$

Démonstration : *feuille Cours_6*

Remarque :

Pour démontrer qu'une application de E dans F **n'est pas linéaire**, on montre au choix :

❶ $f(0_E) \neq 0_F$

❷ En prenant $\alpha = \dots$ dans \mathbb{K} et $u = \dots$ dans E , on a $f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$

❸ En prenant $u = \dots$ dans E et $v = \dots$ dans E , on a $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$

Exemples dans la feuille Cours_6.

Opérations et applications linéaires.

2.1 Combinaison linéaire.

Des précisions sur l'espace vectoriel F^E où E et F désignent deux espaces vectoriels.

Définition :

Pour f une application E dans F et α un scalaire on définit les applications :

$$\begin{array}{ll} \alpha f : E \longrightarrow F & f + g : E \longrightarrow F \\ u \longmapsto \alpha f(u) & u \longmapsto f(u) + g(u) \end{array}$$

Remarques :

- On admet que F^E muni de ces deux lois est un espace vectoriel.
- Le vecteur nul de F^E est la fonction nulle, plus précisément c'est l'application $E \longrightarrow F$
 $u \longmapsto 0_F$

Théorème :

Soient f et g deux applications de E dans F ,

Si f et g sont dans $\mathcal{L}(E, F)$ et α et β deux scalaires alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration :

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, on note $h = \alpha f + \beta g$,

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in E^2$,

$$\begin{aligned} h(\lambda u + \mu v) &= \alpha f(\lambda u + \mu v) + \beta g(\lambda u + \mu v) && \text{(Définitions des opérations ci-dessus)} \\ &= \alpha \lambda f(u) + \alpha \mu f(v) + \beta \lambda g(u) + \beta \mu g(v) && \text{(} f \text{ et } g \text{ sont linéaires)} \\ &= \lambda(\alpha f(u) + \beta g(u)) + \mu(\alpha f(v) + \beta g(v)) \\ &= \lambda h(u) + \mu h(v) \end{aligned}$$

donc $h = \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)$

On a bien démontré que : $\boxed{\text{si } f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(E, F) \text{ alors } \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(E, F)}$

Remarques :

- Le vecteur nul étant l'application nulle de E dans F , $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E .
- Plus généralement : Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Si pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_k \in \mathbb{K}$ et $f_k \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k \in \mathcal{L}(E, F)$

2.2 Composition.

Théorème :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ **alors** $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

Démonstration :

On suppose $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$,

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in E^2$,

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha u + \beta v) &= g(\alpha f(u) + \beta f(v)) && \text{car } f \in \mathcal{L}(E, F) \\ &= \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v)) && \text{car } g \in \mathcal{L}(F, G) \\ &= \alpha g \circ f(u) + \beta g \circ f(v) \end{aligned}$$

donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

Remarque : Plus généralement : Toute composée d'applications linéaires est une application linéaire.

Propriétés :

❶ **Si** $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, $f_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ $f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$

alors $g \circ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 g \circ f_1 + \alpha_2 g \circ f_2$

❷ **Si** $g \in \mathcal{L}(E, F)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, $f_1 \in \mathcal{L}(F, G)$ $f_2 \in \mathcal{L}(F, G)$

alors $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \circ g = \alpha_1 f_1 \circ g + \alpha_2 f_2 \circ g$

Démonstration :

2.3 Puissance d'un endomorphisme

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la notation f^n par la relation de récurrence :

$$f^0 = Id_E \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = f^n \circ f$$

Plus simplement : $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$
n applications

Théorème :

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \rightarrow F$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ **alors** $f^n \in \mathcal{L}(E, F)$

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,

pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, $f^{n_1+n_2} = f^{n_1} \circ f^{n_2}$ et $(f^{n_1})^{n_2} = f^{n_1 n_2}$

2.4 Réciproque d'un isomorphisme.

Théorème :

La réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

Démonstration :

On suppose connaître f une application linéaire bijective de E dans F

Soient $(v_1, v_2) \in F^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{F}^2$,

comme f est bijective on peut définir $u_1 = f^{-1}(v_1)$ et $u_2 = f^{-1}(v_2)$,

ce qui nous donne : $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= f^{-1}(\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 && \text{car } f^{-1} \circ f = Id_E \\ &= \alpha_1 f^{-1}(v_1) + \alpha_2 f^{-1}(v_2) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration

Autrement dit sachant que la réciproque d'une bijection est une bijection :

Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

Remarque : Si f est un automorphisme alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^{-n} l'automorphisme $(f^{-1})^n$

Noyau et Image.

3.1 Définitions.

Définition :

Etant donné une application linéaire $f : E \rightarrow F$, on appelle :

- **noyau de f** , le sous-ensemble de E suivant : $\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$
- **image de f** , le sous-ensemble de F suivant : $\text{Im}(f) = \{f(u) \mid u \in E\}$

Remarques :

- $\ker(f) \subset E$ et $\text{Im}(f) \subset F$.
- $\ker(f)$ est l'ensemble des antécédents de 0_F par f . $\text{Im}(f)$ est l'image directe de E par f .
- $\text{Im}(f) = \{v \in F \mid \exists u \in E : f(u) = v\}$
- Si f est l'application nulle alors $\text{Im}(f) = \{0_F\}$ et $\ker(f) = E$.
- Si f est l'application identité de E alors $\text{Im}(f) = E$ et $\ker(f) = \{0_E\}$.

3.2 Propriétés.

Théorème :

Si f est une application linéaire de E dans F alors :

- ❶ $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E ❷ $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstrations :

- ❶ • $\ker(f) \subset E$,
- $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \ker(f)$
 - Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in \ker(f)^2$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= \alpha f(u) + \beta f(v) && \text{car } f \in \mathcal{L}(E, F) \\ &= \alpha 0_F + \beta 0_F && \text{car } u, v \in \ker(f) \\ &= 0_F \end{aligned}$$

donc $\alpha u + \beta v \in \ker(f)$

En conclusion : $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E

- ❷ • $\text{Im}(f) \subset F$,
- $0_F = f(0_E)$ donc $0_F \in \text{Im}(f)$
 - Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(v_1, v_2) \in \text{Im}(f)^2$,
- on note $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$ avec $u_1, u_2 \in E$,

$$\begin{aligned} \alpha v_1 + \beta v_2 &= \alpha f(u_1) + \beta f(u_2) \\ &= f(\alpha u_1 + \beta u_2) && \text{car } f \in \mathcal{L}(E, F) \\ &\in \text{Im}(f) \end{aligned}$$

En conclusion : $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F

3.3 Image et surjectivité.

Proposition : Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E alors, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration 1 : *(faite en classe)*

Raisonnons par double inclusion

\supseteq Sachant que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) \in \text{Im}(f)$ et que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F , on a bien $\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \text{Im}(f)$

\subseteq Soit $y \in \text{Im}(f)$, on note $y = f(x)$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

comme f est linéaire, il vient $y = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$, et ainsi $y \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

on a bien $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))}$$

Démonstration 2 : *Une autre démonstration plus efficace mais moins élémentaire.*

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(u) \mid u \in E\} \\ &= \left\{ f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

3.4 Noyau et injectivité.

Théorème :

Soit f une application linéaire de E dans F ,
 f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$

Démonstration 1 *(Faites au tableau)*

\Rightarrow On suppose que f est injective.

Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \ker(f) &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff f(x) = f(0_E) \\ &\iff x = 0_E \quad (\text{car } f \text{ est injective}) \end{aligned}$$

donc $\ker(f) = \{0_E\}$ ■.

Remarque : au tableau, nous n'avons pas fait un raisonnement par équivalence.

\Leftarrow On suppose que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$,

on a alors : $f(x_1) - f(x_2) = 0_F$, et comme f est linéaire il vient $f(x_1 - x_2) = 0_F$

d'où $(x_1 - x_2) \in \ker(f)$ et en utilisant l'hypothèse $\ker(f) = \{0_E\}$ il vient $x_1 - x_2 = 0_E$

ou encore $x_1 = x_2$.

donc f est injective ■.

Démonstration 2

Une autre approche par équivalence : (ce n'est pas la démonstration "classique" que j'ai faite au tableau.)

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff [\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u) = f(v) \iff u = v] \\ &\iff [\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u) - f(v) = 0_F \iff u = v] \\ &\iff [\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u - v) = 0_F \iff u - v = 0_E] && \text{car } f \text{ linéaire} \\ &\iff [\forall u \in E, \quad f(u) = 0_F \iff u = 0_E] \\ &\iff [\forall u \in E, \quad u \in \ker(f) \iff u = 0_E] \\ &\iff \ker(f) = \{0_E\} \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est injective si, et seulement si, } \ker(f) = \{0_E\}}$$

Image d'une base.

Soient E et F deux \mathbb{K} espaces vectoriels de **dimension finie**.

Théorème :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E ,
 quel que soit (v_1, v_2, \dots, v_n) une famille de vecteurs de F , il existe une et une seule application
 linéaire f de E dans F vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad f(e_i) = v_i$$

Autrement dit : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base.

Extrait du programme : "Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base."

Démonstration : (ce qui a été fait au tableau)

Idée : Comme f est linéaire alors si $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ alors $f(u) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k)$

La seule connaissance des coordonnées de u et les $f(e_i)$ permet de calculer $f(u)$.

Existence : L'application suivante convient : (ie : elle est linéaire et vérifie $\forall i f(e_i) = v_i$)

$$f : E \longrightarrow F$$

$$u \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k v_k \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

Au tableau j'ai défini $f : E \longrightarrow F$ *c'est une autre approche mais c'est peut-être plus simple avec les v_i .*

$$u \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k f(e_k)$$

Unicité : Supposons connaître deux applications f_1 et f_2 qui conviennent.

(ie : elles sont linéaires et vérifient $\forall i f(e_i) = v_i$)

Soit $u \in E$, on note $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$\begin{aligned} f_1(u) &= f_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f_1(e_i) && \text{car } f_1 \in \mathcal{L}(E, F) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f_2(e_i) && \text{car } f_1(e_i) = f_2(e_i) = v_i \\ &= f_2 \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) && \text{car } f_2 \in \mathcal{L}(E, F) \\ &= f_2(u) \end{aligned}$$

Donc $\forall u \in E, f_1(u) = f_2(u)$ donc $f_1 = f_2$ ■

Remarque :

Cette partie de la démonstration a été présentée différemment au tableau, seule la présentation est différente.

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et \mathcal{B} une base de E .

f est bijective si, et seulement si, l'image par f de la base \mathcal{B} est une base de F .

Démonstration :

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et on désigne alors par $f(\mathcal{B})$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Montrons séparément :

❶ f injective $\iff f(\mathcal{B})$ est libre et ❷ f surjective $\iff f(\mathcal{B})$ est génératrice de F .

Démo de ❶ (*je fais comme au tableau mais on peut aussi faire une double implication*)

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \ker(f) = \{0_E\} \\ &\iff \forall u \in E, \quad f(u) = 0_F \iff u = 0_E \\ &\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = 0_F \iff \sum_{k=1}^n x_k e_k = 0_E \\ &\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = 0_F}_{\text{car } f \text{ est linéaire}} \iff \underbrace{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0}_{\text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre}} \end{aligned}$$

On retrouve la définition de la liberté de $f(\mathcal{B})$.

f est injective si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est libre

Démo de ❷ (*Ici je suis plus efficace qu'au tableau en utilisant le résultat important donnant $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$*)

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\iff \text{Im}(f) = F \\ &\iff \text{Vect}(f(\mathcal{B})) = F \end{aligned}$$

f est surjective si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F

En conclusion :

f est bijective si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base de F

Conséquence :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E un espace de dimension finie.

Si f est bijective alors F est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

En effet : On vient de montrer que si f est bijective alors $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

Or le nombre de vecteurs de $f(\mathcal{B})$ est égal à $\dim(E)$ donc $\dim(E) = \dim(F)$.

Théorème : (*Quand E et F ont la même dimension*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$.

- ❶ f est injective si, et seulement si, f est surjective.
- ❷ f est surjective si, et seulement si, f est injective.

Démonstration : (*Il suffit de montrer : f est injective $\iff f$ est surjective*)

On suppose que $\dim(E) = \dim(F) = n$, on sait donc que $f(\mathcal{B})$ possède n vecteurs.

On utilise deux fois la propriété fondamentale (noté $(*)$) :

”Dans un espace vectoriel de dimension n , toute famille libre (ou génératrice) de n vecteurs est une base”.

$$\begin{aligned}
 f \text{ est injective} &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est une famille libre} && (\text{vue dans la démonstration du th. précédent}) \\
 & && (*) \Updownarrow \\
 &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } F \\
 & && (*) \Updownarrow \\
 &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est une famille génératrice de } F \\
 &\iff f \text{ est surjective} && (\text{vue dans la démonstration du th. précédent})
 \end{aligned}$$

En conclusion : Lorsque $\dim(E) = \dim(F)$ on a

$$\boxed{f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \quad \text{et} \quad f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective}}$$

En pratique :

- quand $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que f est injective pour montrer qu'elle est bijective.
- quand $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que f est surjective pour montrer qu'elle est bijective.

Théorème : *En particulier et le plus utile en pratique.*

Soit E un espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ (un endomorphisme de E).

- ❶ f est injective si, et seulement si, f est bijective.
- ❷ f est surjective si, et seulement si, f est bijective.

En effet : C'est juste un cas particulier du théorème précédent dans le cas $F = E$.

Remarque : Attention ce théorème est faux en dimension infinie comme le montre les 2 exemples suivants.

- L'application linéaire $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est injective, mais non surjective.
 $P \longmapsto XP$

En effet :

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned}
 P \in \ker(f) &\iff f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
 &\iff XP = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
 &\iff P = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad \text{intégrité car } X \neq 0_{\mathbb{R}[X]}
 \end{aligned}$$

donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et ainsi $\boxed{f \text{ est injective}}$

- 1 n'a pas d'antécédent par f , en effet si $XP = 1$ on aurait $0 = 1$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$

- L'application linéaire $g : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est surjective, mais non injective.
 $P \longmapsto P'$

En effet :

- Pour $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$,

en prenant $P = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ on a $g(P) = Q$ donc tout élément de $\mathbb{R}[X]$ admet un antécédent par g ,

$$\boxed{g \text{ est surjective}}$$

- $g(1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $\text{Ker}(g) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et ainsi $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$

Cette dernière remarque est difficile pour un élève de BCPST car on fait essentiellement des exercices en dimension finie. A vous de montrer que vous êtes capable de retenir ces parties du cours, je vous assure c'est possible vous pouvez le faire.

Théorème :

Pour \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F (deux bases fixées)
l'application $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est une bijection de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

En effet : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'un base.

Remarques :

- ❶ Pour montrer que $f = g$, il suffit de montrer que pour des bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' quelconques,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$

- ❷ On peut définir une application linéaire en donnant sa matrice dans deux bases quelconques.

Théorème : (Théorème très utilisé dans ce cours, plus rarement en exercice) On le notera "Théorème (*)"

Soient \mathcal{B} une base de E , et \mathcal{B}' une base de F et f une application linéaire de E dans F ,
 $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est l'unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = A \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

En effet : (Fait au tableau)

- On a vu dans l'introduction que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ convient

- Si A_1 et A_2 conviennent alors $\forall u \in E, A_1 \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = A_2 \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$ donc $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), A_1 X = A_2 X$
En prenant X_1, \dots, X_p la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}$ on montre que A_1 et A_2 ont les mêmes colonnes donc $A_1 = A_2$.
(d'où l'unicité.)

Dans la suite de ce cours on utilisera **Théorème (*)** sous la forme :

Si on trouve une matrice A vérifiant $\forall u \in E, \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = A \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$

alors on pourra affirmer que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$

Relation importante : Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F

$$\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

Avec son corollaire plus couramment utilisé : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, \mathcal{B} une base de E

$$\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

5.3 Matrices et opérations.

5.3.1 Matrice d'une combinaison de deux applications linéaires.

Théorème

Soient \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F ,
Pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \beta \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}'}((\alpha f + \beta g)(u)) &= \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(\alpha f(u) + \beta g(u)) \\ &= \alpha \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) + \beta \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(g(u)) \\ &= \alpha \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) \\ &= \underbrace{(\alpha \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \beta \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g))}_{\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha f + \beta g)} \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) \end{aligned}$$

En utilisant le **Théorème (*)** il vient : $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \beta \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$

Conqéquence :

Soient \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F ,
 l'application $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

En effet : On vient de démontrer qu'elle est linéaire et un peu plus haut on a vu qu'elle est bijective.

5.3.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires.

Théorème

Soient \mathcal{B}_1 une base de E , \mathcal{B}_2 une base de F et \mathcal{B}_3 une base de G ,
 Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}_3}(g(f(u))) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \text{Coord}_{\mathcal{B}_2}(f(u)) \\ &= \underbrace{\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \right)}_{\text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f)} \text{Coord}_{\mathcal{B}_1}(u) \end{aligned}$$

En utilisant le **Théorème (*)** il vient : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$

Corollaire (trois endomorphismes et quatre bases)

Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ et \mathcal{B}_4 quatre bases de E .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_4}(h \circ g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(h) \text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$$

En effet :

Corollaire (Puissance d'un endomorphisme avec une seule base).

Pour f un endomorphisme de E , m un entier naturel et \mathcal{B} une base de E ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^m) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^m$$

En effet :

5.3.3 Matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective.

Théorème

Soient \mathcal{B} une base de E , \mathcal{B}' une base de F et f une application linéaire de E dans F .

f est bijective si, seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible

et alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}$$

Démonstration :

• Supposons que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

Prenons un vecteur v de F et cherchons ses antécédents par f :

Pour $u \in E$,

$$\begin{aligned} f(u) = v &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(v) \\ &\iff \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)^{-1} \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(v) \\ &\iff u = \text{Coord}_{\mathcal{B}}^{-1} (\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)^{-1} \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(v)) \end{aligned}$$

Tout élément de F admet un unique antécédent par f , donc f est une bijection ■

- Supposons que f est une bijection,
 - En utilisant le théorème 1, on sait que $f(\mathcal{B})$ est une base de F et ainsi $\dim(E) = \dim(F)$ donc $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (matrice carrée)
 - On a aussi vu que f^{-1} est linéaire. (Voir ci-dessous)
 - En utilisant le résultat de la question 2) :

$$\begin{aligned}
 Mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)Mat_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f^{-1}) &= Mat_{\mathcal{E}}(f \circ f^{-1}) \\
 &= Mat_{\mathcal{E}}(Id_F) \\
 &= I_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Mat_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f^{-1})Mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) &= Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) \\
 &= Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) \\
 &= I_n
 \end{aligned}$$

on peut en conclure que $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$ est inversible et que $(Mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f))^{-1} = Mat_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f^{-1})$ ■

Ce qui achève la démonstration de :

f est bijective si, seulement si, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$ est inversible

Isomorphe à \mathbb{K}^n .

Définition.

Soient E et F deux espaces vectoriels,
Dire que E et F sont isomorphes signifie qu'il existe un isomorphisme de E dans F .

Théorème.

Pour n un entier naturel non nul,
tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Conséquence.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie,
 E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

Remarque dans ce cours on utilise l'isomorphisme "coordonnées" une fois une base de E choisie.

Théorème :

Soient E un espace de dimension finie et \mathcal{B} une famille de vecteurs de E .
Si \mathcal{B} est une base de E alors
l'application $E \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.
 $v \mapsto \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$

Démonstration : (*Vue dans le cours sur les espaces vectoriels*)

Théorème :

Soient E un espace de dimension finie, \mathcal{B} une base de E et u_1, \dots, u_n des vecteurs de E .

❶ Pour tout $v \in E$,

$$v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \iff \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) \in \text{Vect}(\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_1), \dots, \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_n))$$

❷

(u_1, \dots, u_n) est libre si, et seulement si, $(\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_1), \dots, \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_n))$ est libre.

❸

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \text{rg}(\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_1), \dots, \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u_n)).$$

Démonstration.

Rang d'une application linéaire.

Soient E et F deux \mathbb{K} espaces vectoriels de dimension finie. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.

7.1 Définition.

Définition :

Soit f une application linéaire de E dans F ,
on appelle rang de l'application linéaire f l'entier naturel noté $\text{rg}(f)$ et défini par :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

7.2 Lien avec les autres notions de rang.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et \mathcal{B}' une base de F .

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &= \dim(\text{Im}(f)) \\ &= \dim(\text{Vect}\langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p) \rangle) \\ &= \text{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) \\ &= \text{rg}(\text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(e_1)), \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(e_2)), \dots, \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(e_p))) \\ &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))) \\ &= \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)) \end{aligned}$$

7.3 Théorème du rang

Théorème :

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F un \mathbb{K} -espace vectoriel quelconque

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \text{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

Démonstration : *Ex 4 de la feuille Cours_6-3.*

7.4 Caractérisation des isomorphismes

Théorème :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

f est bijective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = n$

En effet :

Une matrice vue comme une application linéaire.

Ici n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

8.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Définition.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle application canoniquement associée à M , l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$$

Propriété

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application : $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est linéaire.

$$X \longmapsto MX$$

Démonstration : Voir feuille cours_cours_6_quinquies.

En notant : \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, \mathcal{B}' la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

La matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' ($\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$) est égale à M .

8.2 Noyau, image.

Définition :

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit le noyau et l'image de M par :

$$\ker(M) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0 \right\} \quad \text{Im}(M) = \left\{ MX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \right\}$$

Remarques :

- En notant $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on a : $\ker(M) = \ker(f)$ et $\text{Im}(M) = \text{Im}(f)$

$$\bullet \ker(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(M) = \left\{ M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mid (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

- $\ker(M)$ et $\text{Im}(M)$ sont des espaces de matrices colonnes. $\ker(M) \subset \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\text{Im}(M) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

- Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $Y \in \text{Im}(M) \iff \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) : Y = MX$

- Le plus souvent pour déterminer une base de $\ker(M)$ on résout le système homogène $MX = 0$.

(Méthode du pivot sur les lignes)

- Le plus souvent pour déterminer une base $\text{Im}(M)$ on utilise $\text{Im}(M) = \text{Vect}(\underbrace{C_1, \dots, C_p}_{\text{Le colonnes de } M})$ et ensuite :
 - ❶ On utilise les relations entre les colonnes données par l'étude du noyau pour supprimer des colonnes.
ou
 - ❷ On utilise la méthode du pivot sur les colonnes de M .
ou
 - ❸ On connaît la dimension m avec le théorème du rang et on trouve une famille libre de m vecteurs de $\text{Im}(M)$.

Proposition :

Lien entre noyau et image d'une matrice et d'une application linéaire représentée par cette matrice dans des bases.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F :

$$\forall u \in E, \quad u \in \ker(f) \iff \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) \in \ker(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))$$

$$\forall v \in F, \quad v \in \text{Im}(f) \iff \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(v) \in \text{Im}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))$$

Exemples :

1. Soit Δ l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P(X)$ associe $P(X + 1) - P(X - 1)$.
(on ne démontrera pas que Δ est bien linéaire).
Déterminer une base du noyau et une base de l'image de Δ .
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans \mathbb{R}^3 qui à $P(X)$ associe $(P(0), P(1), P(2))$.
(on ne démontrera pas que f est bien linéaire).
Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f .

8.3 Rang d'une matrice.

Définition : Le rang de M est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de M

C'est le rang de l'application linéaire : $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
 $X \mapsto MX$

Dans l'algorithme du pivot de Gauss pour la résolution du système homogène $MX = 0$:
(système n équations, p inconnues)

- $\text{rg}(M)$ est le nombre d'inconnues principales, (ou encore le nombre de pivots)
- $\dim(\ker(M))$ est le nombre d'inconnues secondaires,

Théorème :

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\dim(\text{Im}(M)) + \dim(\ker(M)) = p$

En effet :

Attention : p est le nombre de colonnes de M .

Corollaire :

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\dim(\text{Im}(M)) + \dim(\ker(M)) = n$

8.4 Inverse à gauche, inverse à droite.

Théorème.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées, $AB = I_n \iff BA = I_n$

Démonstration : (Il suffit de montrer une deux implications).

Changement de base.

9.1 Matrice de passage.

Définition et notation

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E ,
la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est appelée matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , on la note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Remarques :

- ❶ Quand on donne une nouvelle base \mathcal{B}' , on donne la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
La matrice des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne.
- ❷ Pour les démonstrations on pourra utiliser la remarque $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$

Exemples : Voir Feuille_Cours_6_5

Propriétés.

Quelles que soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

Démonstration.

Remarque : Toute matrice inversible est la matrice de passage entre deux bases bien choisies.

Propriétés. (Complément)

Quelles que soient \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' trois bases de E , $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$

Démonstration.

9.2 Changement de bases, action sur les coordonnées d'un vecteur.

Théorème

Quelles que soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , $\forall u \in E$, $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(u)$

En effet $u = \sum_{k=1}^n x'_k e'_k$ donc $\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = \sum_{k=1}^n x'_k \text{Coord}_{\mathcal{B}}(e'_k) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(u)$ ■

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(u)$$

Remarques :

- en notant : $X = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$, $X' = \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

$$X = PX' \quad X' = P^{-1}X$$

- Certains trouvent le nom "matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' contre-intuitif.

en effet : pour passer de X à X' on applique $X \mapsto P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}X$

Exemples : Voir Feuille_Cours_6_5

9.3 Changement de bases, action sur la matrice d'un endomorphisme.

Théorème

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

$$\forall f \in \mathcal{L}(E) \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

En effet : Pour $u \in E$,

$$\begin{aligned} \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) &= P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Coord}_{\mathcal{B}}(f(u)) \\ &= P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) \end{aligned}$$

$$\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \underbrace{P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}}_{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)} \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

Ici il faut se rappeler que :

$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ est l'unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = A \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$

- Il y a plusieurs démonstration de cette formule, mais à la fin il faut trouver un moyen de la retenir .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

- Si on note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ alors :

$$M' = P^{-1} M P$$

et

$$M = P M' P^{-1}$$

Remarque : (*Plus compréhensible après le chapitre sur la **diagonalisation***).

On passe souvent d'une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' dans laquelle la matrice $M' = \Delta$ est plus simple

(*diagonale ou triangulaire*).

on a alors avec la formule du changement de base en notant $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$:

$$\Delta = P^{-1} M P$$

on en déduit la relation :

$$M = P \Delta P^{-1}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boxed{A = P D P^{-1}}.$$

Matrices semblables

Dans ce paragraphe toutes les matrices sont carrées.

Définition :

Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

dire que M est semblable à N signifie qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M = P^{-1}NP$$

Exemple et contre exemple.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Attention : une telle matrice P n'est pas unique.

En effet :

Proposition

1. M est semblable à M . (*réflexif*)
2. Si M est semblable à N alors N est semblable à M . (*symétrique*)
3. Si M_1 est semblable à M_2 et M_2 est semblable à M_3 alors M_1 est semblable à M_3 .
(*transitive*)

Démonstration.

Caractérisation.

Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

M et N sont semblables si, et seulement si,

elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases.

Démonstration.

Autrement dit :

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, :

pour un espace E de dimension n , un endomorphisme f de E et deux bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' de E , on a :

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \quad \text{et} \quad N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

M et N représentent le même endomorphisme dans deux bases.

Théorème :

Si deux matrices M et N sont semblables avec pour P inversible la relation $N = P^{-1}MP$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = P^{-1}M^n P$$

Démonstration. voir feuille Cours_6_5 Ex 5

Remarques :

- si M et N sont semblables alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n et N^n le sont aussi.
- On utilise les matrices semblables pour calculer les puissances de matrice.

Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

M est semblable à λI_n si, et seulement si, $M = \lambda I_n$.

En effet :

Théorème : (complément)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Si A et B sont semblables alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Démonstration. voir feuille Cours_6_5 Ex 10

Remarque : La réciproque est fausse, voir feuille Cours_6_5 Ex 9

Théorème : (complément)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Si A et B sont semblables alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

Démonstration. voir feuille Cours_6_5 Ex 6