1 Applications linéaires.

1.1 Exemples.

- Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\text{il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

Remarque : Ce sont les seules fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui possèdent la propriété :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

- "Linéarité de l'intégrale".
Soient a et b deux réels tels que $a < b$, on considère l'application : $\begin{array}{ccc} C^0([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \end{array}$

En notant Ψ cette application on a :

$$\forall (f_1, f_2) \in C^0([a,b])^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \Psi(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \Psi(f_1) + \beta \Psi(f_2)$$

- "Linéarité de l'espérance".
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on note $\mathscr{V}$ l'ensemble des variables aléatoires sur Ω, on considère l'application définie dans le cours de probabilité :

$$\mathbb{E} : \begin{array}{ccc} \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & \mathbb{E}(X) \end{array}$$

Cette application $\mathbb{E}$ vérifie :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{V}^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha\, \mathbb{E}(X_1) + \beta\, \mathbb{E}(X_2)$$

- "Le passage aux coordonnées dans une base est linéaire".
Soit E un espace vectoriel de dimension n et B une base de E, $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Coord}_B(u) \end{array}$

Cette application Coord_B vérifie :

$$\forall (u_1, u_2) \in E^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Coord}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\, \mathrm{Coord}_B(u_1) + \beta\, \mathrm{Coord}_B(u_2)$$

- "Le passage à la dérivée est linéaire".
On considère l'application : $\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$
En notant d cette application on a :

$$\forall (f_1, f_2) \in C^\infty(\mathbb{R})^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad d(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\, d(f_1) + \beta\, d(f_2)$$

- "$X \longmapsto AX$".
Soient p et n deux entiers naturels non nuls et A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
On considère l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

En notant Ψ cette application on a :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \Psi(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha\, \Psi(X_1) + \beta\, \Psi(X_2)$$

1.2 Définitions et vocabulaire.

E et F désignent deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition :

Soit f une application de E dans F.
Dire que f est une application linéaire signifie que :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(u, v) \in E^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Vocabulaire et notations :

- On note : $\mathscr{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- (Lorsque $F = \mathbb{K}$). On appelle **forme linéaire** sur E les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
- (Lorsque $F = E$). On appelle **endomorphisme** de E les applications linéaires de E dans E.
- On note $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Les applications linéaires bijectives sont appelées **isomorphismes**.
- Les endomorphismes bijectifs sont appelés **automorphismes**.
- On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. *(Groupe Linéaire)*

Des cas particuliers importants.

L'application nulle de E dans F est linéaire.
L'application identité de E est un endomorphisme de E. (*c'est même un isomorphisme*)
L'application Coord_B définie dans le cours sur les espaces vectoriels est un isomorphime.

Autres exemples dans la feuille Cours_6.

1.3 Propriétés.

Propositions :

❶ Si f est linéaire de E dans F, on a alors : $f(0_E) = 0_F$

❷ Si f est linéaire de E dans F,

pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$

Démonstration : *feuille Cours_6*

Remarque :

Pour démontrer qu'une application de E dans F **n'est pas linéaire**, on montre au choix :

❶ $f(0_E) \neq 0_F$

❷ En prenant $\alpha =$.......... dans $\mathbb{K}$ et $u =$.......... dans E, on a $f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$

❸ En prenant $u =$.......... dans E et $v =$.......... dans E, on a $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$

Exemples dans la feuille Cours_6.

2

Opérations et applications linéaires.

E et F désignent ici deux espaces vectoriels quelconques sur $\mathbb{K}$.

2.1 Combinaison linéaire.

Théorème :

Soient f et g deux applications de E dans F,
Si f et g sont dans $\mathscr{L}(E,F)$ et α et β deux scalaires alors $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E,F)$.

Démonstration : *feuille Cours_6*

Remarques :
- Le vecteur nul étant l'application nulle de E dans F, $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.
- Plus généralement : Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

2.2 Composition.

Théorème :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $f: E \to F$ et $g: F \to G$.
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ **alors** $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Démonstration : *feuille Cours_6*

Remarque : Plus généralement : Toute composée d'applications linéaires est une application linéaire.

Propriétés :

❶ **Si** $g \in \mathscr{L}(F,G)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, $f_1 \in \mathscr{L}(E,F)$ $f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$

alors $g \circ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1\ g \circ f_1 + \alpha_2\ g \circ f_2$

❷ **Si** $g \in \mathscr{L}(E,F)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, $f_1 \in \mathscr{L}(F,G)$ $f_2 \in \mathscr{L}(F,G)$

alors $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \circ g = \alpha_1\ f_1 \circ g + \alpha_2\ f_2 \circ g$

Démonstration :

2.3 Puissance d'un endomorphisme

Définition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la notation f^n par la relation de récurrence :

$$f^0 = Id_E \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = f^n \circ f$$

Plus simplement : $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ applications}}$

Propriétés :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$,
pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, $\quad f^{n_1+n_2} = f^{n_1} \circ f^{n_2} \qquad$ et $\qquad (f^{n_1})^{n_2} = f^{n_1 n_2}$

2.4 Réciproque d'un isomorphisme.

Théorème :

La réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

Démonstration :
On suppose connaître f une application linéaire bijective de E dans F
Soient $(v_1, v_2) \in F^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{F}^2$,
comme f est bijective on peut définir $u_1 = f^{-1}(v_1)$ et $u_2 = f^{-1}(v_2)$,
ce qui nous donne : $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= f^{-1}(\alpha_1 f(u_1)\alpha_2 f(u_2)) \\ &= f^{-1}\big(f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)\big) && \textit{car } f \textit{ est linéaire} \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 && \textit{car } f^{-1} \circ f = Id_E \\ &= \alpha_1 f^{-1}(v_1) + \alpha_2 f^{-1}(v_2) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration

Autrement dit : Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Remarque : Si f est un automorphisme alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^{-n} l'automorphisme $\left(f^{-1}\right)^n$

3

Noyau et Image.

E et F désignent ici deux espaces vectoriels quelconques sur $\mathbb{K}$.

3.1 Définitions.

Définition :

Etant donné une application linéaire $f : E \to F$, on appelle :
- **noyau de f**, le sous-ensemble de E suivant : $\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$
- **image de f**, le sous-ensemble de F suivant : $\mathrm{Im}(f) = \{\ f(u) \mid u \in E\}$

Remarques :
- $\ker(f) \subset E$ et $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
- $\ker(f)$ est l'ensemble des antécédents de 0_F par f.
- $\mathrm{Im}(f)$ est l'image directe de E par f.
- Si f est l'application nulle alors $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ et $\ker(f) = E$.
- Si f est l'application identité de E alors $\mathrm{Im}(f) = E$ et $\ker(f) = \{0_E\}$.

3.2 Propriétés.

Théorème :

Soit f une application linéaire de E dans F, on a alors :

❶ $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

❷ $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration : *feuille Cours_6*

3.3 Image et surjectivité.

Proposition : Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$.

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E alors, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \cdots, f(u_n))$.

Démonstration : *feuille Cours_6*

3.4 Noyau et injectivité.

Théorème :

Soit f une application linéaire de E dans F,

f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{\,0_E\}$

Démonstration : *feuille Cours_6*

4 Image d'une base.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème :

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E ,
quel que soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire φ de E dans F vérifiant :

$$\forall i \in [\![1; p]\!], \quad \varphi(e_i) = u_i$$

Démonstration : *feuille Cours_6*

Autrement dit : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base.

Théorème :

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.

f est bijective si, et seulement si, l'image par f de la base $\mathscr{B}$ est une base de F.

Démonstration : *feuille Cours_6*

Théorème : (*Quand E et F ont la même dimension*)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$.

❶ f est injective si, et seulement si, f est bijective.

❷ f est surjective si, et seulement si, f est bijective.

Démonstration : *feuille Cours_6*

Remarques :

- quand $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que f est injective pour montrer qu'elle est bijective.
- quand $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que f est surjective pour montrer qu'elle est bijective.

5

Représentation matricielle.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie. On note : $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.

5.1 Lien entre matrice et application linéaire.

Théorème. *(Complément)*

Soient f une application de E dans F, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.
S'il existe une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$
alors ❶ f est linéaire
et ❷ A est unique et pour tout $j \in [\![1;p]\!]$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_j))$

Démonstration : *(Rapidement fait au tableau)*

❶
$$\begin{aligned}\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(\alpha u + \beta v)) &= A\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\alpha u + \beta v)\\ &= \alpha A\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) + \beta A\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(v)\\ &= \alpha \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) + \beta \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(v))\\ &= \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(\alpha f(u) + \beta f(v))\end{aligned}$$

❷
$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_j)) = A\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(e_j) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{La } j\text{ième colonne de } A$$

5.2 Matrice d'une application linéaire.

Définition

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$,
on appelle **matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** la matrice (notée : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$)

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$$

Voir feuille_cours_6_ter.

Remarques :

- La $j^{\text{ème}}$ colonne de cette matrice est la matrice colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$.
- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ dépend du choix des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
- On dit que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ représente f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
- Lorsque f est un endomorphisme de E et que $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ on note : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
- La matrice de l'application nulle est la matrice nulle.
- La matrice de l'application l'identité de E dans une base est la matrice identité.

  Attention : la matrice de l'identité de E dans deux bases distinctes n'est pas la matrice identité.

Illustrations permettant de retenir la définition.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_1)) & \cdots & \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_j)) & \cdots & \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_p)) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\underbrace{f(e_1)}_{\downarrow} \quad \underbrace{f(e_j)}_{\downarrow} \quad \underbrace{f(e_p)}_{\downarrow}}^{f(\mathscr{B})} \\ \end{array}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \to e'_1 \\ \vdots \\ \to e'_i \\ \vdots \\ \to e'_n \end{array}\right\} \mathscr{B}' \end{array}$$

Proposition :

> Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F
> l'application $f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est une bijection de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

En effet : Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'un base.

Remarques :

❶ Pour montrer que $f = g$, il suffit de montrer que pour des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ quelconques,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$$

❷ On peut définir une application linéaire en donnant sa matrice dans deux bases quelconques.

Exemples : *Voir feuille Exo_12.*

Proposition :

> Soient $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F et f une application linéaire de E dans F,
> $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est l'unique matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant :
> $$\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$$

En effet : *(Faite au tableau)*

• $u = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, or $f \in \mathscr{L}(E,F)$ donc $f(u) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)$ et ainsi $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_j))$

or $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(e_j))$ est la j ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

donc on a bien $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

• L'unicité a été démontrée au début de ce paragraphe.

Relation importante :

Pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F

$$\boxed{\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)}$$

5.3 Matrices et opérations.

5.3.1 Matrice d'une combinaison de deux applications linéaires.

Proposition

Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F,
Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$$

En effet : *(Rapidement)*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}((\alpha f + \beta g)(u)) & = & \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(\alpha f(u) + \beta g(u)) \\ & = & \alpha \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) + \beta \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(g(u)) \\ & = & \alpha \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g) \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) \\ & = & \underbrace{\Big(\alpha \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)\Big)}_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\alpha f + \beta g)} \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}$$

Remarque :

Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F,
l'application $f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

En effet : *On vient de démontrer qu'elle est linéaire et un peu plus haut on a vu qu'elle est bijective.*

5.3.2 Matrice de la composée de deux applications linéaires.

Proposition

Soient $\mathscr{B}_1$ une base de E, $\mathscr{B}_2$ une base de F et $\mathscr{B}_3$ une base de G,

Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$

En effet :

Proposition *(trois endomorphismes et quatre bases)*

> Soient $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_4$ quatre bases de E.
>
> $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_4}(h \circ g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(h)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$$

En effet :

Proposition *(Puissance d'un endomorphisme avec une seule base).*

> Pour f un endomorphisme de E, m un entier naturel et $\mathscr{B}$ une base de E,
>
> $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^m) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^m$$

En effet :

5.3.3 Matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective.

Théorème

> Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et f une application linéaire de E dans F.
>
> f est bijective si, seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est inversible
>
> et alors :
> $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))^{-1}$$

Démonstration :

5.3.4 Inverse à droite ou à gauche.

Théorème

> Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et f une application linéaire de E dans F.
> On suppose que $\dim(E) = \dim(F) = n$ et on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$,
>
> ❶ S'il existe $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $MN = I_n$ alors f est bijective.
>
> ❷ S'il existe $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $NM = I_n$ alors f est bijective.

Démonstration :

Remarque : On démontre ici une propriété qu'on admet souvent en première année :

> Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,
>
> ❶ S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$
>
> ❷ S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$

5.3.5 Matrice de passage.

Voir Feuille_Cours_6_quater

Définition et notation

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E,
la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est appelée matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on la note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$

Remarques :

❶ Quand on donne une nouvelle $\mathscr{B}'$, on donne la matrice $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.
La matrice des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne.

❷ Pour les démonstrations on utilise souvent la remarque $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$

Exemples :
Donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ dans les cas suivants :

1. $\mathscr{B} = ((1,0),(1,1))$ et $\mathscr{B}' = ((1,2),(3,4))$
2. $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = (1,(X-1),(X-1)^2)$

Propriétés.

Quelles que soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\quad P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n \quad$ et $\quad {P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$

Démonstration. Voir Feuille_Cours_6_quater

Propriétés. *(Complément)*

Quelles que soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E, $\quad P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}$

Démonstration. Voir Feuille_Cours_6_quater

5.4 Changement de base.

5.4.1 Changement de bases, action sur les coordonnées d'un vecteur.

Théorème

Quelles que soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\quad \forall u \in E, \quad \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\text{Coord}_{\mathscr{B}'}(u)$

En effet *(avec les notations habituelles)* :

$$u = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k \quad \text{donc} \quad \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{k=1}^{n} x'_k \text{Coord}_{\mathscr{B}}(e'_k) = Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\text{Coord}_{\mathscr{B}'}(u)$$

■

$$\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\text{Coord}_{\mathscr{B}'}(u)$$

Remarque : en notant : $X = \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$, $X' = \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$

$$X = PX' \qquad\qquad X' = P^{-1}X$$

Exemple :

1. En revenant à la définition :
   déterminer les coordonnées de $(1,2,-1)$ dans la base $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$
2. Avec la formule de changement de base :
   déterminer les coordonnées de $(1,2,-1)$ dans la base $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

5.4.2 Changement de bases, action sur la matrice d'un endomorphisme.

Théorème

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

$$\forall f \in \mathscr{L}(E) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(f(u)) \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) \\ &= \underbrace{P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)}\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(u) \end{aligned}$$

Ici il faut se rappeler que :

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est l'unique matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall u \in E, \quad \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = A\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u)$

• On a vu plusieurs démonstration, mais à la fin il faut trouver un moyen de retenir cette formule.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

• Si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ alors :

$$M' = P^{-1}MP$$

Remarque : (*Plus compréhensible après le chapitre sur la diagonalisation*).
On passe souvent d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la matrice M' est plus simple *(diagonale ou triangulaire)*, notons la Δ.
on a alors avec la formule du changement de base :

$$\Delta = P^{-1}MP$$

on en déduit la relation :

$$M = P\Delta P^{-1}$$

Complément. *Pour ceux qui ont cherché l'Ex 5 de la feuille Cours_6_quater.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_1'$ deux bases de E et $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_2'$ deux bases de F

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1',\mathscr{B}_2'}(f) = P_{\mathscr{B}_2',\mathscr{B}_2}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_1'}$$

Il est totalement inutile de retenir cette formule pour un élève de BCPST.

En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_2'}(f(u)) &= P_{\mathscr{B}_2',\mathscr{B}_2}\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_2}(f(u)) \\ &= P_{\mathscr{B}_2',\mathscr{B}_2}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_1}(u) \\ &= \underbrace{P_{\mathscr{B}_2',\mathscr{B}_2}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_1'}}_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1',\mathscr{B}_2'}(f)}\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_1'}(u) \end{aligned}$$

6 Rang d'une application linéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.

6.1 Définition.

Définition :

Soit f une application linéaire de E dans F,
on appelle rang de l'application linéaire f l'entier naturel noté $\mathrm{rg}(f)$ et défini par :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)$$

6.2 Lien avec les autres notions de rang.

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f) &= \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \\
&= \dim\left(\mathrm{Vect}\left\langle f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\right\rangle\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(Mat_{\mathscr{B}'}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\right)
\end{aligned}$$

En effet :

6.3 Théorème du rang

Théorème :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque

$$\forall f \in \mathscr{L}(E, F), \qquad \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

Démonstration *Voir la feuille_Cours_5_quater*

7

Isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Définition.

Soient E et F deux espaces vectoriels,

Dire que E et F sont isomorphes signifie qu'il existe un isomorphisme de E dans F.

Théorème.

Pour n un entier naturel non nul,

tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Conséquence.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie,

E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

Remarque dans ce cours on utilise l'isomorphisme "coordonnées" une fois une base de E choisie.

Théorème :

Soient E un espace de dimension finie et $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E.

Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors

l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ v & \longmapsto & \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) \end{array}$ est un isomorphisme.

Démonstration : *(Vue dans le cours sur les espaces vectoriels)*

Proposition :

Soient E un espace de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E et u_1, ... u_n des vecteurs de E.

❶ Pour tout $v \in E$,

$$v \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \iff \text{Coord}_{\mathscr{B}}(v) \in \text{Vect}(\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n))$$

❷

$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ est libre si, et seulement si, } (\text{Coord}_{\mathscr{B}}(u_1), \ldots, \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u_n)) \text{ est libre.}$$

Voir la feuille Cours_6_bis.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u \longmapsto f(u)"'] \arrow[d, "u \mapsto \text{Coord}_{\mathscr{B}}(u)"'] & F \arrow[d, "v \mapsto \text{Coord}_{\mathscr{B}'}(v)"] \\ \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \arrow[r, "X \mapsto MX"'] & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

avec $M = Mat_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}(f)$

8

Une matrice vue comme une application linéaire.

Ici n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

8.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Définition.

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on appelle application canoniquement associée à M, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$$

Propriété

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application : $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$ est linéaire.

Démonstration : *Voir feuille cours_cours_6_quinquies.*

En notant : $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{B}'$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ $(\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))$ est égale à M .

8.2 Noyau, image.

Définition :

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit le noyau et l'image de M par :

$$\ker(M) = \left\{ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; MX = 0 \right\} \qquad \mathrm{Im}(M) = \left\{ MX \;\middle|\; X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \right\}$$

Remarques :

• En notant f : $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$ on a : $\ker(M) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(f)$

• $\ker(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $\mathrm{Im}(M) = \left\{ M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \;\middle|\; (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$

• $\ker(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$ sont des espaces de matrices colonnes. $\ker(M) \subset \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Im}(M) \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

• Pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $Y \in \mathrm{Im}(M) \iff \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) :\ Y = MX$

• Le plus souvent pour déterminer une base de $\ker(M)$ on résout le système homogène $MX = 0$.

(Méthode du pivot sur les lignes)

• Le plus souvent pour déterminer une base $\mathrm{Im}(M)$ on utilise $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(\underbrace{C_1 , \ldots , C_p}_{\text{Le colonnes de } M})$ et ensuite :

❶ On utilise les relations entre les colonnes données par l'étude du noyau pour supprimer des colonnes.
ou
❷ On utilise la méthode du pivot sur les colonnes de M.
ou
❸ On connait la dimension m avec le théorème du rang et on trouve une famille libre de m vecteurs de $\mathrm{Im}(M)$.

Proposition :
Lien entre noyau et image d'une matrice et d'une application linéaire représentée par cette matrice dans des bases.

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F :

$$\forall u \in E, \quad u \in \ker(f) \iff \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(u) \in \ker(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))$$

$$\forall v \in F, \quad v \in \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(v) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f))$$

Exemples :

1. Soit Δ l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P(X)$ associe $P(X+1) - P(X-1)$.
   (on ne démontera pas que Δ est bien linéaire).
   Déterminer une base du noyau et une base de l'image de Δ.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $P(X)$ associe $(P(0), P(1), P(2))$.
   (on ne démontera pas que f est bien linéaire).
   Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

8.3 Rang d'une matrice.

Définition : Le rang de M est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de M

C'est le rang de l'application linéaire : $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array}$

Dans l'algorithme du pivot de Gauss pour la résolution du système homogène $MX = 0$:
(système n équations, p inconnues)

- $\mathrm{rg}(M)$ est le nombre d'inconnues principales, (*ou encore le nombre de pivots*)
- $\dim(\ker(M))$ est le nombre d'inconnues secondaires,

Théorème :

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\quad \dim(\mathrm{Im}(M)) + \dim(\ker(M)) = p$

Démonstration : *Voir feuille cours_cours_6_quinquies.*

Attention : p est le nombre de colonnes de M.

8.4 Inverse à gauche, inverse à droite.

Théorème.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées, $\quad AB = I_n \iff BA = I_n$

Démonstration : *(Il suffit de montrer une deux implications).*

On suppose que $AB = I_n$ et on note : $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}). \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$

on sait que $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A)$ *(En effet $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$)* cela entraine ici que $\mathrm{rg}(A) = n$ donc f est surjective.
$\mathrm{rg}(A) = n$ et le théorème du rang entraine que $\ker(f) = \{0_E\}$ donc f est injective.
On en déduit que f est un isomorphisme.
or la matrice de f est A donc *(voir matrice de f^{-1})* A est inversible.
et alors la relation $AB = I_n$ entraine $A^{-1}AB = A^{-1}I_n$ donc $B = A^{-1}$ et ainsi $BA = I_n$

8.5 Matrices semblables

Dans ce paragraphe toutes les matrices sont carrées.

Définition :

Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
dire que M est semblable à N signifie qu'il existe une matrice P inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$M = P^{-1}NP$$

Attention : une telle matrice P n'est pas unique.

Caractérisation.

Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Deux matrices M et N sont semblables
si, et seulement si, elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases.

Démonstration.

Remarque :

Deux matrices M et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si :
pour un espace E de dimension n, un endomorphisme f de E et deux bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ de E, on a :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \qquad \text{et} \qquad N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

M et N représentent le même endomorphisme dans deux bases.

Théorème :

Si deux matrices M et N sont semblables avec pour P inversible la relation $N = P^{-1}MP$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad N^n = P^{-1}M^nP$$

Démonstration. *(Voir feuille Cours_6_quinquies)*

Remarques :

- si M et N sont semblables alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n et N^n le sont aussi.
- si M et N sont semblables alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[M^n = 0$ équivaut à $N^n = 0]$
  si M est nilpotente alors N aussi avec le même indice de nilpotence.
- On utilise les matrices semblables pour calculer les puissances de matrice.

Théorème : *(complément)*

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
Si A et B sont semblables alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Démonstration.

Idée 1 en utilisant $A = P^{-1}BP$, P est inversible donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P^{-1}BP) = \mathrm{rg}(P^{-1}B) = \mathrm{rg}(B)$

Ici on utilise : si P inversible alors $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$ (*démontré dans l'Ex 3 de la feuille_13*)

Idée 2 en utilisant $A = Mat_{\mathscr{B}_1}(f)$ et $B = Mat_{\mathscr{B}_2}(f)$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(B)$

Remarque : La réciproque est fausse, *voir Ex 6 de la feuille Exo_13*