

E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} : \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) n et p deux entiers naturels non nuls.

Définition et notation (*Matrice de passage*).

- Ex 1 :**
- 1) Comment retenir cette définition.
 - 2) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ dans les cas suivants :
 - a) $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 2), (3, 4))$
 - b) $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, (X - 1), (X - 1)^2)$
 - 3) Justifier que toutes les matrices de passage sont inversibles.

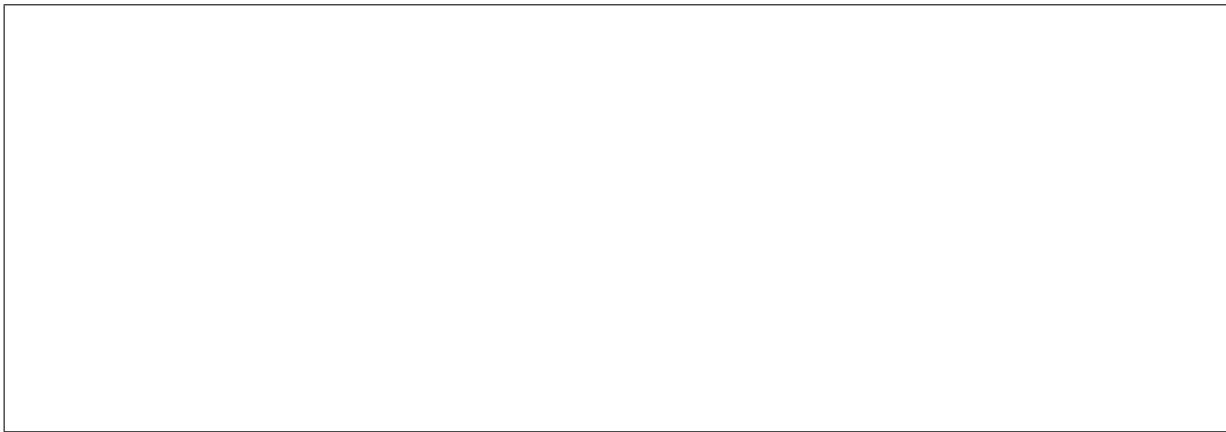
Formule (*Effet du changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.*)

- Ex 2 :**
- 1) Démontrer cette proposition.
 - 2) Comment retenir cette formule.
 - 3)
 - a) En revenant à la définition :
déterminer les coordonnées de $(1, 2, -1)$ dans la base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$
 - b) Avec la formule de changement de base :
déterminer les coordonnées de $(1, 2, -1)$ dans la base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$
 - 4)
 - a) En revenant à la définition :
déterminer les coordonnées de $2 + X + 3X^2$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$
 - b) Avec la formule de changement de base :
déterminer les coordonnées de $2 + X + 3X^2$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$

Propositions (*Propriétés des matrices de passage*)

- Ex 3 :**
- 1) Démontrer ces propositions.
 - 2) Comment retenir cette formule.

Formule (Effet du changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.)



- Ex 4 :**
- 1) Démontrer cette proposition.
 - 2) Comment retenir cette formule.
 - 3) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, où $e'_1 = (1, 2)$ et $e'_2 = (1, 3)$.
 - a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
 - b) Déterminer les matrices de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.
 - c) On note f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, déterminer la matrice de f_1 dans la base $\mathcal{B}'$.
 - d) On note f_2 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$, déterminer la matrice de f_2 dans la base $\mathcal{B}$.
 - 4) On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et on considère la famille $\mathcal{B}' = (1 - 2X^2, 3X^2 + X, 2X^2 + X)$.
 - a)
 - i. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
 - ii. En déduire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
 - b) On note : f l'endomorphisme de E définie par $f(P) = P'$.
 - i. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
 - ii. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Ex 5 : (*) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ deux bases de E et $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$ deux bases de F

Donner une formule donnant $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(f)$ en fonction de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$

Indication : On pourra utiliser : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4}(h \circ g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4}(h) \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$