1

Définitions. vocabulaire. notation.

1.1 Introduction.

Nous allons étudier l'intégrale de fonctions sur des intervalles semi-ouverts ou ouverts.

- Semi-ouverts : (a et b des réels) $\left]-\infty;b\right]$ $\left]a;b\right]$ $\left[a;b\right[$ $\left[a;+\infty\right[$
- Ouverts : (a et b des réels) $\left]-\infty;b\right[$ $\left]a;b\right[$ $\left]a;+\infty\right[$

La représentation de ces intégrales restent l'aire de domaine du plan, mais ici ils ne sont pas bornés.

(voir Feuille_Cours_7)

Remarque : Dans ce cours les propositions sont présentées pour $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $a<b$,

mais $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature *(CV ou DV)* et quand elles représentent un réel on a :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2 Intégrales sur un intervalle semi-ouvert.

1.2.1 Les fonctions continues sur $\left[a,b\right[$

Ici a est un réel et b désigne un réel $>a$ ou $+\infty$.

Définition.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\left[a,b\right[$,

- Si $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$ alors on dit que $\underbrace{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe}}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$ et vaut $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Quand $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ n'a pas de limite réelle quand x tend vers b^-, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Caractérisation. *(Avec une primitive de f sur $[a,b[$)*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\left[a,b\right[$, on note F une primitive de f sur $\left[a,b\right[$,

- Si $\displaystyle\lim_{x\to b^-}F(x)=\ell\in\mathbb{R}$ alors $\underbrace{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe}}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$ et vaut $\displaystyle\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a)$.
- Quand $F(x)$ n'a pas de limite réelle quand x tend vers b^-, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Remarques :

- Cette caractérisation ne dépend pas du choix de la primitive choisie.
- Ici on montre comment étudier une intégrale impropre quand on sait exprimer une primitive de l'intégrande. *(nom masculin)*

  Dans la suite nous verrons des raisonnements permettant d'étudier la nature sans faire le calcul d'une primitive.

Exemples : *voir la feuille_Cours_7.*

Proposition. *(On peut remplacer la borne non impropre)*

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\big[a, b\big[$.
>
> Pour c un élément de $[a, b[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ont la même nature.

En effet :

1.2.2 Les fonctions continues sur $\big]a, b\big]$

Ici a est un réel ou $-\infty$ et b un réel vérifiant $a < b$.

Définition.

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\big]a, b\big]$,
>
> - Si $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$ alors on dit que $\underbrace{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe}}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$ et vaut $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
> - Quand $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'a pas de limite réelle quand x tend vers a^+, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

On peut adapter les propositions du paragraphe précédent

1.3 Intégrales sur un intervalle ouvert.

Ici a est un réel ou $-\infty$ et b un réel $> a$ ou $+\infty$.

Définition.

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\big]a, b\big[$ et c un élément quelconque de $]a, b[$,
>
> $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge signifie que : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
>
> et alors elle vaut $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Caractérisation. (Avec une primitive de f sur $]a, b[$.

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\big]a, b\big[$, on note F une primitive de f sur $\big]a, b\big[$,
>
> - Si $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\lim_{x\to b^-} F(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\underbrace{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe}}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$ et vaut $\displaystyle\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$.
> - Quand F n'a pas de limite réelle en a^+ ou en b^-, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Attention :

Ici on n'utilise pas la relation de Chasles.

Dans un exercice : ne pas commencer par $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$,

c'est à la fin qu'on l'écrit quand on a montré la convergence des deux intégrales.

Remarques :

- Cette définition est cohérente avec la définition des intégrales d'une fonction continue sur un segment.

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\big[a, b\big]$, on note F une primitive de f sur $\big[a, b\big]$,
>
> L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et on a aussi : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$.

En effet dans ce cas F est continue en a et b, donc $\displaystyle\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) = F(b) - F(a)$.

- *(Fonctions continues sur une segment).*

> Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

- *Cas particulier de la fonction nulle.*

> Si f est la fonction nulle sur $]a,b[$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

On utilise cette proposition dans la plupart des exemples avec les fonctions indicatrices.

- *(Peu importe les valeurs de f aux bornes de $[a,b]$)*

> Soients f et g deux fonctions continues sur $]a,b[$
> Si $\quad \forall t \in]a,b[, \quad f(t) = g(t)$
> alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

En effet : f et g ont les mêmes primitives sur $]a,b[$ et tout dépend de ces primitives.

Proposition :

> Pour f une fonction continue sur l'intervalle $\big]a,b\big[$
> $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente
> si, seulement si, pour c_1 et c_2 dans $\big]a,b\big[$, $\displaystyle\int_a^{c_1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c_2}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.
> et alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{c_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_2}^b f(t)\,\mathrm{d}t$

En effet : En effet $\int_a^b f$ CV $\iff$ F a une limite réelle en a et b $\iff$ $\int_a^{c_1} f$ CV et $\int_{c_2}^b f$ CV
et alors $\displaystyle\int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \int_{c_2}^b f = F(c_1) - \lim_a F + F(c_2) - F(c_1) + \lim_b F - F(c_2) = \lim_b F - \lim_a F = \int_a^b f$

1.4 Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.

Proposition.

> Soient a et b deux réels, f une fonction continue sur l'intervalle $\big]a,b\big[$,
> Si $f(x)$ admet une limite réelle quand x tend vers a^+ et quand x tend vers b^-,
> alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

En effet : si on note g le prolongement par continuité de $f|_{]a,b[}$ à $[a,b]$ on a $\int_a^b g$ converge donc $\int_a^b f$

Exemples : *Feuille_Cours_7.*

Remarques :

- Certains disent dans cette situation que l'intégrale est "faussement impropre".
  (terme non utilisé dans le programme)
- Si f est continue sur $]a,b[$ et si $\begin{array}{rcl}]a,b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est prolongeable par continuité en a et b

  alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

1.5 Généralisation.

Définition.

Quand a désigne un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$, n un entier naturel non nul et $(a_0, ..., a_n)$ tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

Pour f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf *(éventuellement)* en tous les réels $a_1, ..., a_{n-1}$

Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente signifie que :

pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

et en cas de convergence de toutes ces intégrales, on définit : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Illustration graphique.

Notation. *(Extrait du programme)*
Les notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ pourront, selon le contexte, désigner l'intégrale généralisée ou sa valeur.

Méthode pratique générale. *voir exemples dans la feuille_Cours_7*

❶ Déterminer les intervalles $\Big(]a_k\,; a_{k+1}[\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.

❷ Etudier pour chaque k entre 0 et $n-1$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

❸ En cas de convergence de toutes ces intégrales impropres, on conclut :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{est convergente et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques :

- Si au moins une des intégrales $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
- On ne peut écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ qu'à la fin du raisonnement qu'en cas de convergence.

Proposition. *(Intégrales sur un plus petit intervalle)*

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf *(éventuellement)* en nombre fini de réels de $]a, b[$,
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors

pour tous réels c et d vérifiant $a \leqslant c < d \leqslant b$, l'intégrale $\displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Proposition.

Soient α un réel et f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf *(éventuellement)* en nombre fini de réels de $]a, b[$,

Si $\alpha \neq 0$ alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En effet :

2 Propriétés

a est un réel ou $-\infty$ et b un réel $> a$ ou $+\infty$,
et f, g, f_1, ... , f_n sont des fonctions continues sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

2.1 Relation de Chasles.

Théorème :

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

alors, pour tout $(c_1, c_2, c_3) \in \left[a, b\right]^3$, $\displaystyle\int_{c_1}^{c_2} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{c_2}^{c_3} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c_1}^{c_3} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent

$$\text{et} \qquad \int_{c_1}^{c_3} f(t)\,dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt + \int_{c_2}^{c_3} f(t)\,dt$$

Généralisation : pour $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

alors, quel que soit $(c_0, ..., c_n) \in [a, b]^{n+1}$, on a : $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent

$$\text{et} \qquad \int_{c_0}^{c_n} f(t)\,dt \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\,dt$$

Remarque : Les c_k ne sont pas nécessairement dans l'ordre croissant est peuvent être égaux à a ou b.

Exemples : *Voir la feuille_Cours_7_bis*

2.2 Linéarité.

Théorème :

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes,

alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration :

Exemples : *Voir la feuille_Cours_7_bis*

Généralisation :

Si pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

alors pour tout $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t)\right)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t)\right)\,dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\int_a^b f_k(t)\,dt\right)$$

Démonstration :

Exemples : *Voir la feuille_Cours_7_bis*

2.3 Positivité

On rappelle qu'on est sous l'hypothèse $a < b$.

Théorème :

Lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

Si $\forall t \in]a,b[,\ f(t) \geqslant 0$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$

Démonstration :

Exemples : *Voir la feuille_Cours_7_bis*

2.4 Croissance de l'intégrale.

Théorème :

Lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes,

Si $\forall t \in]a,b[,\ f(t) \leqslant g(t)$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

Démonstration :

Exemples : *Voir la feuille_Cours_7_bis*

2.5 Stricte positivité.

a désigne un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$ et $\boxed{a < b}$.

Théorème :

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a,b[, \\ \forall t \in]a,b[,\ f(t) \geqslant 0, \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \forall t \in]a,b[, \quad f(t) = 0$$

Démonstration. *(Exercice à faire)*

Exemple d'application vu dans *la feuille_Cours_7_bis* :

Si f est continue sur $[0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(f(x)-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x=0$ alors on peut en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^2$.

Remarques :

- On peut remplacer dans ce théorème l'intervalle $]a,b[$ par tout intervalle I : $]a,b]$, $[a,b[$ ou $[a,b]$

En effet :

- Attention à l'argument "f est continue sur I".

On peut trouver une fonction positive sur $]0,1[$, telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=0$ et qui n'est pas nulle sur $]0,1[$.

(qui n'est pas la fonction nulle)

Exemple : *(avec un illustration graphique)* :

Corollaire 1 :

Lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

$$\textbf{Si}\ \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a,b[,\\ \forall t\in]a,b[,\ f(t)\geqslant 0,\\ f \text{ n'est pas la fonction nulle sur }]a,b[\end{cases}\qquad \textbf{alors}\quad \int_a^b f(t)\,dt>0$$

En effet :

Exemple d'application : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^1 t\cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t>0$

Corollaire 2 :

Pour f une fonction continue sur $]a,b[$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

Lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

$$\textbf{Si}\quad \forall t\in]a,b[,\ f(t)>0\qquad \textbf{alors}\quad \int_a^b f(t)\,dt>0$$

En effet :

Exemples d'utilisation :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,dt>0$
- $\displaystyle\int_0^1(\ln(t))^3\,dt<0$

2.6 Parité.

Ici a est un réel positif ou $+\infty$ et f est continue sur $]-a,a[$ sauf en un nombre fini de réels.

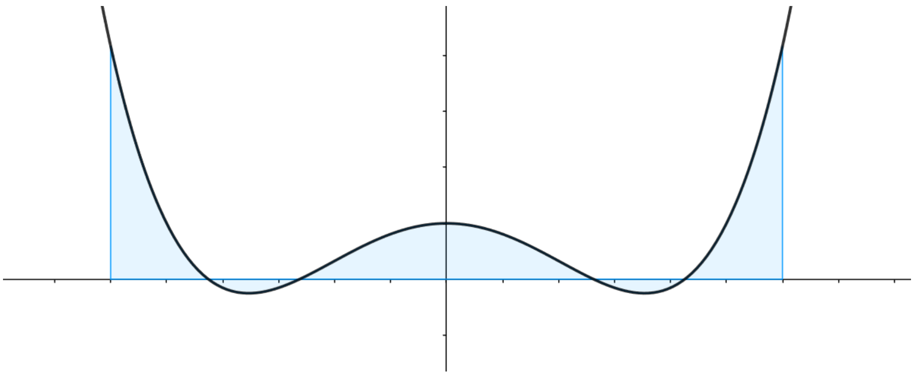
Proposition :

Lorsque f est paire,

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ est convergente **si, et seulement si,** $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ est convergente

et alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$

En effet :



Exemples : *Voir la feuille_Cours_7_bis*

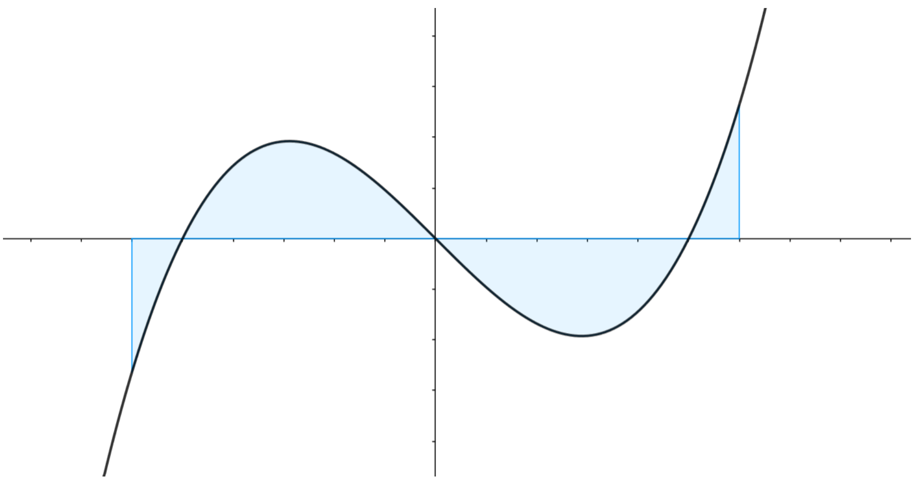
Proposition :

Lorsque f est impaire,

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ est convergente **si, et seulement si,** $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ est convergente

et alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

En effet :



Exemples : *Voir la feuille_Cours_7_bis*

3

Théorèmes de convergences.

3.1 Théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs

Théorème.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$,

Si $\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Démonstration.

$F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ et $G : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$ sont croissantes *(car les intégrandes sont positifs)*

L'encadrement et la "croissance de l'intégrale" donne $\forall x \in [a, b[, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$

$$\text{donc } \forall x \in [a, b[, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \underbrace{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}_{\in \mathbb{R}}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de limite monotone à F pour conclure.

Remarque : En prenant la contraposée, on obtient :

Si $\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Corollaires.

❶ Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b]$,

Si $\forall t \in]a, b], \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente

❷ Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$ *(sauf en un nombre fini de réels)*,

Si $\forall t \in]a, b[, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ *(sauf en un nombre fini de réels)*.

et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarques.

- Comme pour les séries : On ne passe pas à l'intégrale!!!
- On compare les intégrandes positifs pour en déduire la nature d'une intégrale.
- Ce théorème permet uniquement de trouver la nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- Ce théorème ne permet pas de calculer la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ quand il y a convergence.
- Attention ici la conclusion du théorème n'est pas : "elles sont de même nature".

3.2 Théorème de convergence par équivalence des intégrandes positifs.

Théorème.

Soient f et g deux fonctions continues sur $\big[a, b\big[$,

Si $\quad \forall t \in \big[a, b\big[, \quad g(t) \geqslant 0 \qquad$ et $\quad$ si $\quad f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$, alors

❶ Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

❷ Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration. *(Rapidement)*

On se place dans le cas où g ne s'annule pas sur $\big[a, b\big[$,

- $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$ donc il existe $c \in [a, b[, \quad \forall t \in [c, b[, \quad \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{f(t)}{g(t)} \leqslant \dfrac{3}{2}$
- et $g(t) \geqslant 0 \quad$ donc $\quad \forall t \in [c, b[, \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{2}\, g(t) \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{3}{2}\, g(t)$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence par comparaison pour conclure.

Corollaire.

Soient f et g deux fonctions continues sur $\big]a, b\big]$,

Si $\quad \forall t \in \big]a, b\big], \quad g(t) \geqslant 0 \qquad$ et $\quad$ si $\quad f(t) \underset{t \to a^+}{\sim} g(t)$, alors

❶ Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

❷ Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarques.

- Ce théorème permet uniquement de trouver la nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Ce théorème ne permet pas de calculer la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ni même son signe.
- On peut résumer ❶ et ❷ en :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

- On peut résumer ❶ et ❷ en :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{sont de même nature.}$$

4 Absolue convergence.

a désigne un réel ou $-\infty$ et b un réel $> a$ ou $+\infty$,

Définition.

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

Dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente signifie que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente

Théorème :

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente

alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Démonstration. *(voir feuille_cours_7_quater)*

Proposition

Soient f et g des fonctions continues sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels,

et α, β deux réels,

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes

alors $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Autrement dit : L'ensemble des fonctions continues sur $]a, b[$, *sauf éventuellement en un nombre fini de réels, dont l'intégrale est absolument convergente sur* $]a, b[$ *est stable par combinaison linéaire.*

Remarque

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels,

Si f est de signe constant sur $]a, b[$ alors on a l'équivalence :

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

5

Intégrales impropres usuelles.

5.1 Loi uniforme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\ \mathrm{d}t = b - a$$

5.2 Loi exponentielle

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

5.3 Loi normale

Centrée réduite. *(admis)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ \mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi}$$

A savoir redémontrer.

5.4 Compléments : Intégrales de Riemann.

Hors programme, voir feuille_Exo_14

	$\alpha \leqslant 0$	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$1 < \alpha$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$	CV	CV	DV	DV
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t =$	$\dfrac{1}{1-\alpha}$	$\dfrac{1}{1-\alpha}$		
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$	DV	DV	DV	CV
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t =$				$\dfrac{1}{\alpha-1}$

Des exemples de convergentes.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = 2 \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = 1 \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = 2$$

Des exemples de divergentes.

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2}\ dt \quad \text{diverge} \qquad \int_0^1 \frac{1}{t}\ dt \quad \text{diverge} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt \quad \text{diverge} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt \quad \text{diverge}$$

6

Calculs.

Dans ce paragraphe, a et b vérifient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

6.1 Intégrations par parties.

Théorème. (*Intégration par parties*)

Soients u et v deux fonctions de classe C^1 sur $\left]a, b\right[$,

$$\text{Si } \boxed{\lim_{x\to a^+} u(x)v(x) \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to b^-} u(x)v(x) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}} \quad \textbf{\textit{(Trois conditions)}}$$

$$\text{alors} \quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \ \text{ est convergente} \qquad \text{et}$$

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} u(x)v(x) - \lim_{x\to a^+} u(x)v(x) - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration.

Exemples. *Voir la feuille Cours_7_Quinquies*

En pratique on n'utilise pas souvent ce théorème, il est plus simple de chercher une primitive.

Voir **Ex 5** de la feuille_calcul_8 pour le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Corollaire.

Soients u et v deux fonctions de classe C^1 sur $\left]a, b\right[$,

Si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} u(x)v(x) \in \mathbb{R}$, et $\displaystyle\lim_{x\to b^-} u(x)v(x) \in \mathbb{R}$,

alors $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En effet.

6.2 Changement de variable.

Théorème. (*Changement de variable* $x = \varphi(t)$)

Soient φ et f deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si φ est de classe C^1 et strictement monotone sur $]a, b[$, on note $\alpha = \displaystyle\lim_{t\to a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \displaystyle\lim_{t\to b^-} \varphi(t)$

et si f est continue sur $]\alpha, \beta[$,

$$\text{alors} \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ converge} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t \text{ converge}$$

et en cas de convergence : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$

Démonstration.

Exemples. *Voir la feuille Cours_7_Quinquies*

Corollaire. *(f strictement croissante)*

> Soient φ et f deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et α, β des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.
>
> Si $\varphi :]a,b[\to]\alpha,\beta[$ est de classe C^1, strictement croissante et bijective, et si f est continue sur $]\alpha,\beta[$,
>
> alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$ converge
>
> et en cas de convergence :
>
> $$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

En effet : $\alpha = \lim\limits_{t\to a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t)$

Corollaire. *(f strictement décroissante)*

> Soient φ et f deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et α, β des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.
>
> Si $\varphi :]a,b[\to]\beta,\alpha[$ est de classe C^1, strictement décroissante et bijective, et si f est continue sur $]\beta,\alpha[$,
>
> alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$ converge
>
> et en cas de convergence :
>
> $$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

En effet : $\alpha = \lim\limits_{t\to a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t)$

En pratique :

❶ On identifie la fonction φ et on vérifie qu'elle possède les propriétés requises.
❷ on cherche a, b, α et β tels que t va de a à b et x de α à β.
❸ on remplace dx par $\varphi'(t)dt$ ou $\varphi'(t)dt$ par dx.
❹ on remplace x par $\varphi(t)$ ou $\varphi(t)$ par x.

$$\underbrace{\boxed{\int_\alpha^\beta}}_{❷}\ \underbrace{\boxed{f(x)}}_{❹}\ \underbrace{\boxed{dx}}_{❸} = \underbrace{\boxed{\int_a^b}}_{❷}\ \underbrace{\boxed{f\,(\varphi(t))}}_{❹}\ \underbrace{\boxed{\varphi'(t)\,dt}}_{❸}$$

Exemples. *Voir la feuille Cours_7_Quinquies*

Corollaire. *Changement de variable affine $x = mt + p$.*

> Soient f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et m, p deux réels tels que $m \neq 0$
>
> On note : $\alpha = \lim\limits_{t\to a^+} (mt+p)$ et $\beta = \lim\limits_{t\to b^-} (mt+p)$
>
> Si f est continue sur $]\alpha,\beta[$,
>
> alors $\displaystyle\int_a^b f(mt+p)\,m\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ converge
>
> et en cas de convergence :
>
> $$\int_a^b f(mt+p)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(x)\,\frac{1}{m}\,\mathrm{d}x$$

Remarque :
- Ici les conditions d'utilisation du théorème sont plus simples, on peut alléger la rédaction.

Exemples. *Voir la feuille Cours_7_Quinquies*