

Table des matières

1	Introduction	2
2	Définitions. vocabulaire. notation.	3
2.1	Intégrales sur un intervalle semi-ouvert.	3
2.2	Intégrales sur un intervalle ouvert.	4
2.3	Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.	5
2.4	Généralisation.	5
3	Théorèmes de convergences.	7
3.1	Théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs	7
3.2	Théorème de convergence par équivalence des intégrandes positifs.	8
4	Propriétés	9
4.1	Relation de Chasles.	9
4.2	Linéarité.	9
4.3	Positivité	10
4.4	Croissance de l'intégrale.	10
4.5	Stricte positivité.	10
4.6	Parité.	12
5	Absolute convergence.	13
6	Calculs.	14
6.1	Intégrations par parties.	14
6.2	Changement de variable.	14
7	Intégrales impropres usuelles.	16
7.1	Loi uniforme	16
7.2	Loi exponentielle	16
7.3	Loi normale	16
7.4	Compléments : Intégrales de Riemann.	16

Introduction

Ce que nous avons déjà vu :

- Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle.
- Lien avec les sommes de Riemann.
- Théorème fondamental de l'analyse et sa conséquence principale : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Les objectifs de ce cours :

- Définir sous conditions : $\int_a^b f(t) dt$ pour f continue sur $]a, b[$.
- Définir sous conditions : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ pour f continue sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points.
- Etudier sous conditions : $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$ pour f continue sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points.

Comme pour les séries, il y faudra établir la convergence (l'existence) avant de faire le calcul.

On va retrouver les propositions du cours sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance de l'intégrale, stricte positivité, parité.

La représentation reste l'aire de domaines du plan, mais ici ils ne sont pas bornés (*le plus souvent*).

Pour l'étude de la nature (*convergence, existence*) nous verrons deux théorèmes comme pour les séries.

La configuration principale de ces objectifs étant l'étude de deux fonctions f et F définies sur \mathbb{R} et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

où : f continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement sur un ensemble fini.

F continue sur \mathbb{R} tout entier et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement sur un ensemble fini.

En pratique pour l'étude de la nature et pour les calculs on va devoir s'adapter aux différentes situations :

- ❶ $\int_a^b f(t) dt$ pour f continue sur $[a, b[$. avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
- ❷ $\int_a^b f(t) dt$ pour f continue sur $]a, b]$. avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.
- ❸ $\int_a^b f(t) dt$ pour f continue sur $]a, b[$. avec $(a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty)$ et $(b = +\infty$ ou $b \in \mathbb{R})$.
- ❹ $\int_a^b f(t) dt$ pour f continue sauf en un nombre fini de points sur $]a, b[$.
avec $(a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty)$ et $(b = +\infty$ ou $b \in \mathbb{R})$.

Remarque : Dans ce cours les propositions sont présentées pour $\int_a^b f(t) dt$ lorsque $a < b$,

mais $\int_b^a f(t) dt$ et $\int_a^a f(t) dt$ sont de même nature (*CV ou DV*) et quand elles représentent un réel on a :

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

Définitions. vocabulaire. notation.

Toutes les intégrales définies dans ce cours sont appelées intégrales généralisées (ou impropres).

2.1 Intégrales sur un intervalle semi-ouvert.

2.1.1 Les fonctions continues sur $[a, b[$

Ici a est un réel et b désigne un réel $> a$ ou $+\infty$.

On dit que l'intégrale est *impropre* en b .

Définition.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$,

- Si $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$ alors on dit que $\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$ existe et vaut $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$.

- Quand $\int_a^x f(t) dt$ n'a pas de limite réelle quand x tend vers b^- , on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

Caractérisation. (Avec une primitive de f sur $[a, b[$)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$, on note F une primitive de f sur $[a, b[$,

- Si $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$ existe et vaut $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a)$.

- Quand $F(x)$ n'a pas de limite réelle quand x tend vers b^- , on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

En effet :

Remarques :

- Cette caractérisation ne dépend pas du choix de la primitive choisie.
- Ici on détermine la nature en trouvant une primitive de l'intégrande. (*nom masculin*)

Dans la suite nous verrons des raisonnements permettant d'étudier la nature sans faire le calcul d'une primitive.

Exemples : voir la feuille_Cours_8.

Proposition. (On peut remplacer la borne non impropre)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$.

Pour c un élément de $[a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ ont la même nature.

En effet :

2.1.2 Les fonctions continues sur $]a, b]$

Ici a est un réel ou $-\infty$ et b un réel vérifiant $a < b$.

On dit que l'intégrale est *impropre* en a .

Définition.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b]$,

- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$ alors on dit que $\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$ existe et vaut $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$.
- Quand $\int_x^b f(t) dt$ n'a pas de limite réelle quand x tend vers a^+ , on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

On peut adapter la caractérisation et la proposition du paragraphe précédent

2.2 Intégrales sur un intervalle ouvert.

Ici a est un réel ou $-\infty$ et b un réel $> a$ ou $+\infty$.

Définition.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$ et c un élément quelconque de $]a, b[$,

$\int_a^b f(t) dt$ converge signifie que : $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent.

et alors elle vaut $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Caractérisation. (Avec une primitive de f sur $]a, b[$).

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$, on note F une primitive de f sur $]a, b[$,

- Si $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$ existe et vaut $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$.
- Quand F n'a pas de limite réelle en a^+ ou en b^- , on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

En effet :

Attention :

Dans un exercice : ne pas commencer par $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$,

c'est à la fin qu'on l'écrit quand on a montré la convergence des deux intégrales.

Voir la rédaction dans la *feuille_cours_8*

Remarques :

- Cette définition est cohérente avec la définition des intégrales d'une fonction continue sur un segment.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, on note F une primitive de f sur $[a, b]$,

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ existe et on a aussi : $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$.

En effet :

- Cas particulier de la fonction nulle.

Si f est la fonction nulle sur $]a, b[$ alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente et $\int_a^b f(t) dt = 0$

En effet :

On utilise cette proposition dans la plupart des exemples avec les fonctions indicatrices.

- (Peu importe les valeurs de f aux bornes de $[a, b]$)

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$
 Si $\forall t \in]a, b[, f(t) = g(t)$
 alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

En effet :

Exemples :

2.3 Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.

Proposition.

Soient a et b deux réels, f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$,
 Si $f(x)$ admet une limite réelle quand x tend vers a^+ et quand x tend vers b^- ,
 alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

En effet :

Exemples :

Remarque :

Certains disent dans cette situation que l'intégrale est "faussement impropre" en a ou/et en b .
(terme non utilisé dans le programme)

2.4 Généralisation.

Définition.

Quand a désigne un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$, n un entier naturel non nul et (a_0, \dots, a_n) tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Pour f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf (éventuellement) aux réels a_1, \dots, a_{n-1}
 Dire que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente signifie que :

pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'intégrale $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t) dt$ est convergente.

et en cas de convergence de toutes ces intégrales, on définit : $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$.

Notation. (Extrait du programme)

Les notations $\int_I f$, $\int_I f(t)dt$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)dt$ pourront, selon le contexte, désigner l'intégrale généralisée ou sa valeur.

Méthode pratique générale. voir exemples dans la feuille_Cours_8

❶ Déterminer les intervalles $(]a_{k-1}, a_k[)_{1 \leq k \leq n}$.

❷ Etudier pour chaque k entre 0 et $n - 1$, la nature de l'intégrale $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t) dt$.

❸ En cas de convergence de toutes ces intégrales impropres, on conclut :

$$\int_a^b f(t) dt \text{ est convergente et } \int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t) dt$$

Remarques :

• Si au moins une des intégrales $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t) dt$ diverge alors $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

• On ne peut écrire $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t) dt$ qu'à la fin du raisonnement en cas de convergence.

Proposition. (Intégrales sur un plus petit intervalle)

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf (éventuellement) en nombre fini de réels de $]a, b[$,

Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente alors

pour tous réels c et d vérifiant $a \leq c < d \leq b$, l'intégrale $\int_c^d f(t) dt$ est convergente.

En effet :

Proposition.

Soient α un réel et f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf (éventuellement) en nombre fini de réels de $]a, b[$,

Si $\alpha \neq 0$ alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b \alpha f(t) dt$ sont de même nature.

En effet :

Théorèmes de convergences.

3.1 Théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs

Théorème.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$,

Si $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$

et si $\int_a^b g(t) dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Démonstration.

$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ sont croissantes (car les intégrandes sont positifs)

L'encadrement et la "croissance de l'intégrale" donne $\forall x \in [a, b[, 0 \leq F(x) \leq G(x)$

$$\text{donc } \forall x \in [a, b[, 0 \leq F(x) \leq \underbrace{\int_a^b g(t) dt}_{\in \mathbb{R}}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de limite monotone à F pour conclure.

Remarque : En prenant la contraposée, on obtient :

Si $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$ et si $\int_a^b f(t) dt$ est divergente, alors $\int_a^b g(t) dt$ est divergente.

Corollaires.

❶ Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b]$,

Si $\forall t \in]a, b]$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ et si $\int_a^b g(t) dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente

❷ Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$ (sauf en un nombre fini de réels),

Si $\forall t \in]a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$ (sauf en un nombre fini de réels).

et si $\int_a^b g(t) dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Remarques.

- Comme pour les séries : On ne passe pas à l'intégrale!!!
- On compare les intégrandes positifs pour en déduire la nature d'une intégrale.
- Ce théorème permet uniquement de trouver la nature de $\int_a^b f(t) dt$ ou de $\int_a^b g(t) dt$
- Ce théorème ne permet pas de calculer la valeur de $\int_a^b f(t) dt$ quand il y a convergence.
- Attention ici la conclusion du théorème n'est pas : "elles sont de même nature".

3.2 Théorème de convergence par équivalence des intégrandes positifs.

Théorème.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$,

Si $\forall t \in [a, b[$, $g(t) \geq 0$ et si $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$, alors

❶ Si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

❷ Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge alors $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

Démonstration. (*Rapidement*)

On se place dans le cas où g ne s'annule pas sur $[a, b[$,

• $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$ donc il existe $c \in [a, b[$, $\forall t \in [c, b[$, $\frac{1}{2} \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{3}{2}$

• et $g(t) \geq 0$ donc $\forall t \in [c, b[$, $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence par comparaison pour conclure.

Corollaire.

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b]$,

Si $\forall t \in]a, b]$, $g(t) \geq 0$ et si $f(t) \underset{t \rightarrow a^+}{\sim} g(t)$, alors

❶ Si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

❷ Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge alors $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

Remarques.

• Ce théorème permet uniquement de trouver la nature de $\int_a^b f(t) dt$.

• Ce théorème ne permet pas de calculer la valeur de $\int_a^b f(t) dt$, ni même son signe.

• On peut résumer ❶ et ❷ en :

$\int_a^b g(t) dt$ converge si, et seulement si, $\int_a^b f(t) dt$ converge.

• On peut résumer ❶ et ❷ en :

$\int_a^b g(t) dt$ et $\int_a^b f(t) dt$ sont de même nature.

Propriétés

a est un réel ou $-\infty$ et b un réel $> a$ ou $+\infty$,

et f, g, f_1, \dots, f_n sont des fonctions continues sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

4.1 Relation de Chasles.

Théorème :

$$\begin{aligned} \text{Si } \int_a^b f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \text{alors, pour tout } (c_1, c_2, c_3) \in [a, b]^3, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt, \quad \int_{c_2}^{c_3} f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{c_1}^{c_3} f(t) dt \quad \text{convergent} \\ \text{et} \quad \int_{c_1}^{c_3} f(t) dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt + \int_{c_2}^{c_3} f(t) dt \end{aligned}$$

Démonstration :

Généralisation : pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{Si } \int_a^b f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \text{alors, quel que soit } (c_0, \dots, c_n) \in [a, b]^{n+1}, \text{ on a : } \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t) dt \text{ convergent} \\ \text{et} \quad \int_{c_0}^{c_n} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t) dt \end{aligned}$$

Remarque : Les c_k ne sont pas nécessairement dans l'ordre croissant est peuvent être égaux à a ou b .

4.2 Linéarité.

Théorème :

$$\begin{aligned} \text{Si } \int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_a^b g(t) dt \text{ sont convergentes,} \\ \text{alors pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \text{ converge et} \\ \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

Démonstration :

Généralisation :

Si pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'intégrale $\int_a^b f_k(t) dt$ est convergente,
alors pour tout $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$, l'intégrale $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t) \right) dt$ converge et

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\int_a^b f_k(t) dt \right)$$

Démonstration :

4.3 Positivité

On rappelle qu'on est sous l'hypothèse $a < b$.

Théorème :

Lorsque $\int_a^b f(t) dt$ est convergente,

Si $\forall t \in]a, b[, f(t) \geq 0$ **alors** $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

Démonstration :

4.4 Croissance de l'intégrale.

Théorème :

Lorsque $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont convergentes,

Si $\forall t \in]a, b[, f(t) \leq g(t)$ **alors** $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Démonstration :

4.5 Stricte positivité.

a désigne un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$ et $a < b$.

Théorème :

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur }]a, b[, \\ \forall t \in]a, b[, f(t) \geq 0, \\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{cases}$ **alors** $\forall t \in]a, b[, f(t) = 0$

Démonstration. (*Exercice à faire*)

Remarques :

- On peut remplacer dans ce théorème l'intervalle $]a, b[$ par tout intervalle $I :]a, b], [a, b[$ ou $[a, b]$

En effet :

- Attention à l'argument " f est continue sur I ".

On peut trouver une fonction positive sur $]0, 1[$, telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$ et qui n'est pas nulle sur $]0, 1[$.

(qui n'est pas la fonction nulle)

Exemple : (avec un illustration graphique) :

Corollaire 1 :

Lorsque $\int_a^b f(t) dt$ est convergente,

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a, b[, \\ \forall t \in]a, b[, f(t) \geq 0, \\ f \text{ n'est pas la fonction nulle sur }]a, b[\end{cases} \quad \text{alors } \int_a^b f(t) dt > 0$$

En effet :

Exemple d'application : L'intégrale $\int_0^1 t \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge et $\int_0^1 t \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt > 0$

Corollaire 2 :

Pour f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

Lorsque $\int_a^b f(t) dt$ est convergente,

$$\text{Si } \forall t \in]a, b[, f(t) > 0 \quad \text{alors } \int_a^b f(t) dt > 0$$

En effet :

Exemples d'utilisation :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt > 0$
- $\int_0^1 (\ln(t))^3 dt < 0$

4.6 Parité.

Ici a est un réel positif ou $+\infty$ et f est continue sur $] -a, a[$ sauf en un nombre fini de réels.

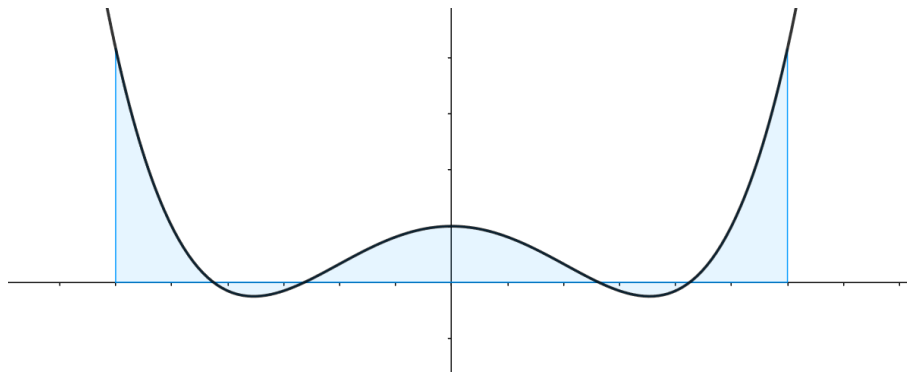
Proposition :

Lorsque f est paire,

$\int_{-a}^a f(t) dt$ est convergente **si, et seulement si**, $\int_0^a f(t) dt$ est convergente

et alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$

En effet :



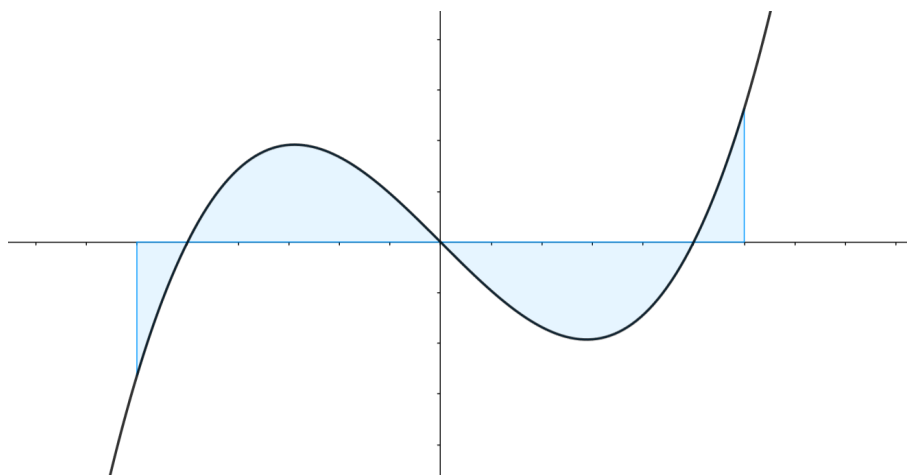
Proposition :

Lorsque f est impaire,

$\int_{-a}^a f(t) dt$ est convergente **si, et seulement si**, $\int_0^a f(t) dt$ est convergente

et alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$

En effet :



Absolue convergence.

a désigne un réel ou $-\infty$ et b un réel $> a$ ou $+\infty$,

Définition.

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

Dire que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente signifie que $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente

Théorème :

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

Si $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente

alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente et $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Démonstration.

Proposition

Soient f et g des fonctions continues sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels, et α, β deux réels,

Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont absolument convergentes

alors $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt$ est absolument convergente.

Autrement dit : L'ensemble des fonctions continues sur $]a, b[$, sauf éventuellement en un nombre fini de réels, dont l'intégrale est absolument convergente sur $]a, b[$ est stable par combinaison linéaire.

Remarque

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels,

Si f est de signe constant sur $]a, b[$ alors on a l'équivalence :

$\int_a^b f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, $\int_a^b |f(t)| dt$ est absolument convergente.

Dans ce paragraphe, a et b vérifient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

6.1 Intégrations par parties.

Théorème. (*Intégration par parties*)

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $]a, b[$,

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) \in \mathbb{R}$ et $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ converge (*Trois conditions*)

alors $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ est convergente et

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x) - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Démonstration.

Exemples.

En pratique on n'utilise pas souvent ce théorème, il est plus simple de chercher une primitive.

Corollaire.

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $]a, b[$,

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v'(x) \in \mathbb{R}$, et $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v'(x) \in \mathbb{R}$,

alors $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ et $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ sont de même nature.

En effet.

6.2 Changement de variable.

Théorème. (*Changement de variable $x = \varphi(t)$*)

Soient φ et f deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .

Si φ est de classe C^1 et strictement monotone sur $]a, b[$, on note $\alpha = \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$

et si f est continue sur $] \alpha, \beta [$,

alors $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ converge si, et seulement si, $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ converge

et en cas de convergence : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Démonstration.

Corollaire. (*f* strictement croissante)

Soient φ et f deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} et α, β des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.
Si $\varphi :]a, b[\rightarrow]\alpha, \beta[$ est de classe C^1 , strictement croissante et bijective, et si f est continue sur $]\alpha, \beta[$,

alors $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ converge si, et seulement si, $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ converge

et en cas de convergence :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

En effet : $\alpha = \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$

Corollaire. (*f* strictement décroissante)

Soient φ et f deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} et α, β des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $\varphi :]a, b[\rightarrow]\beta, \alpha[$ est de classe C^1 , strictement décroissante et bijective, et si f est continue sur $]\beta, \alpha[$,

alors $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ converge si, et seulement si, $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ converge

et en cas de convergence :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

En effet : $\alpha = \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$

En pratique :

- ❶ On identifie la fonction φ et on vérifie qu'elle possède les propriétés requises.
- ❷ on cherche a, b, α et β tels que t va de a à b et x de α à β .
- ❸ on remplace dx par $\varphi'(t)dt$ ou $\varphi'(t)dt$ par dx .
- ❹ on remplace x par $\varphi(t)$ ou $\varphi(t)$ par x .

$$\underbrace{\int_{\alpha}^{\beta}}_{\text{❷}} \underbrace{f(x)}_{\text{❹}} \underbrace{dx}_{\text{❸}} = \underbrace{\int_a^b}_{\text{❷}} \underbrace{f(\varphi(t))}_{\text{❹}} \underbrace{\varphi'(t) dt}_{\text{❸}}$$

Corollaire. *Changement de variable affine* $x = mt + p$.

Soient f une fonction à valeurs dans \mathbb{R} et m, p deux réels tels que $m \neq 0$

On note : $\alpha = \lim_{t \rightarrow a^+} (mt + p)$ et $\beta = \lim_{t \rightarrow b^-} (mt + p)$

Si f est continue sur $]\alpha, \beta[$,

alors $\int_a^b f(mt + p) m dt$ converge si, et seulement si, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ converge

et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(mt + p) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{1}{m} dx$$

Remarque :

Ici les conditions d'utilisation du théorème sont plus simples, on peut alléger la rédaction.

Intégrales impropres usuelles.

7.1 Loi uniforme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) dt = b - a$$

7.2 Loi exponentielle

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

7.3 Loi normale

Centrée réduite. (*admis*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \sigma\sqrt{2\pi}$$

A savoir redémontrer.

7.4 Compléments : Intégrales de Riemann.

Hors programme, voir feuille-Exo_15

	$\alpha \leq 0$	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$1 < \alpha$
$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$	CV	CV	DV	DV
$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt =$	$\frac{1}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$		
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$	DV	DV	DV	CV
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt =$				$\frac{1}{\alpha-1}$

Des exemples de convergentes.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt = 2$$

Des exemples de divergentes.

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt \text{ diverge} \quad \int_0^1 \frac{1}{t} dt \text{ diverge} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \text{ diverge} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \text{ diverge}$$