

## Table des matières

<b>1 Définitions, vocabulaire, notation.</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction.	2
1.2 Intégrales sur un intervalle semi-ouvert.	2
1.3 Intégrales sur un intervalle ouvert.	3
1.4 Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.	4
1.5 Généralisation.	4
<b>2 Propriétés</b>	<b>6</b>
2.1 Relation de Chasles.	6
2.2 Linéarité.	6
2.3 Positivité	7
2.4 Croissance de l'intégrale.	7
2.5 Stricte positivité.	7
2.6 Parité.	8
<b>3 Théorèmes de convergences.</b>	<b>9</b>
3.1 Théorème de convergence par comparaison	9
3.2 Théorème de convergence par équivalence des intégrandes positifs.	10
<b>4 Absolue convergence.</b>	<b>11</b>
<b>5 Intégrales impropres usuelles.</b>	<b>12</b>
5.1 Loi uniforme	12
5.2 Loi exponentielle	12
5.3 Loi normale	12
5.4 Compléments : Intégrales de Riemann.	12
<b>6 Calculs.</b>	<b>13</b>
6.1 Intégrations par parties.	13
6.2 Changement de variable.	14

## Définitions. vocabulaire. notation.

### 1.1 Introduction.

Nous allons étudier l'intégrale de fonctions sur des intervalles semi-ouverts ou ouverts.

- Semi-ouverts :  $(a \text{ et } b \text{ des réels}) ] - \infty; b[ \quad ] a; b[ \quad ] a; b[ \quad ] a; +\infty[$
- Ouverts :  $(a \text{ et } b \text{ des réels}) ] - \infty; b[ \quad ] a; b[ \quad ] a; +\infty[$

La représentation de ces intégrales restent l'aire de domaine du plan, mais ici ils ne sont pas bornés.

(voir Feuille\_Cours\_7)

**Remarque :** Dans ce cours les propositions sont présentées pour  $\int_a^b f(t) dt$  lorsque  $a < b$ ,

mais  $\int_b^a f(t) dt$  et  $\int_a^b f(t) dt$  sont de même nature (CV ou DV) et quand elles représentent un réel on a :

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

### 1.2 Intégrales sur un intervalle semi-ouvert.

#### 1.2.1 Les fonctions continues sur $[a, b[$

Ici  $a$  est un réel et  $b$  désigne un réel  $> a$  ou  $+\infty$ .

**Définition.**

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b[$ ,

- Si  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$  alors on dit que  $\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$  existe et vaut  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ .
- Quand  $\int_a^x f(t) dt$  n'a pas de limite réelle quand  $x$  tend vers  $b^-$ , on dit que  $\int_a^b f(t) dt$  est divergente.

**Caractérisation.** (Avec une primitive de  $f$  sur  $[a, b[$ )

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b[$ , on note  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b[$ ,

- Si  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \ell \in \mathbb{R}$  alors  $\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$  existe et vaut  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a)$ .
- Quand  $F(x)$  n'a pas de limite réelle quand  $x$  tend vers  $b^-$ , on dit que  $\int_a^b f(t) dt$  est divergente.

**Remarques :**

- Cette caractérisation ne dépend pas du choix de la primitive choisie.
- Ici on montre comment étudier une intégrale impropre quand on sait exprimer une primitive de l'intégrande.  
(nom masculin)

Dans la suite nous verrons des raisonnements permettant d'étudier la nature sans faire le calcul d'une primitive.

**Exemples :** voir la feuille\_Cours\_7.

**Proposition.** (On peut remplacer la borne non impropre)

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b[$ .

Pour  $c$  un élément de  $[a, b[$ , les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  ont la même nature.

**En effet :**

### 1.2.2 Les fonctions continues sur $]a, b]$

Ici  $a$  est un réel ou  $-\infty$  et  $b$  un réel vérifiant  $a < b$ .

**Définition.**

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $]a, b]$ ,

• Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$  alors on dit que  $\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$  existe et vaut  $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$ .

• Quand  $\int_x^b f(t) dt$  n'a pas de limite réelle quand  $x$  tend vers  $a^+$ , on dit que  $\int_a^b f(t) dt$  est divergente.

On peut adapter les propositions du paragraphe précédent

### 1.3 Intégrales sur un intervalle ouvert.

Ici  $a$  est un réel ou  $-\infty$  et  $b$  un réel  $> a$  ou  $+\infty$ .

**Définition.**

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $]a, b[$  et  $c$  un élément quelconque de  $]a, b[$ ,

$\int_a^b f(t) dt$  converge signifie que :  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  convergent.  
et alors elle vaut  $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ .

**Caractérisation.** (Avec une primitive de  $f$  sur  $]a, b[$ .)

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $]a, b[$ , on note  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]a, b[$ ,

• Si  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$  alors  $\underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{on dit aussi que l'intégrale converge}}$  existe et vaut  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ .

• Quand  $F$  n'a pas de limite réelle en  $a^+$  ou en  $b^-$ , on dit que  $\int_a^b f(t) dt$  est divergente.

**Attention :**

Ici on n'utilise pas la relation de Chasles.

Dans un exercice : ne pas commencer par  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$ ,

c'est à la fin qu'on l'écrit quand on a montré la convergence des deux intégrales.

**Remarques :**

- Cette définition est cohérente avec la définition des intégrales d'une fonction continue sur un segment.

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , on note  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ ,

L'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  existe et on a aussi :  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ .

En effet dans ce cas  $F$  est continue en  $a$  et  $b$ , donc  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(b) - F(a)$ .

- (Fonctions continues sur une segment).

Si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  alors l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente.

- Cas particulier de la fonction nulle.

Si  $f$  est la fonction nulle sur  $]a, b[$  alors  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente et  $\int_a^b f(t) dt = 0$

On utilise cette proposition dans la plupart des exemples avec les fonctions indicatrices.

- (Peu importe les valeurs de  $f$  aux bornes de  $[a, b]$ )

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $]a, b[$   
 Si  $\forall t \in ]a, b[, f(t) = g(t)$   
 alors  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  sont de même nature et égales en cas de convergence.

En effet :  $f$  et  $g$  ont les mêmes primitives sur  $]a, b[$  et tout dépend de ces primitives.

**Proposition :**

Pour  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $]a, b[$   
 $\int_a^b f(t) dt$  est convergente  
 si, et seulement si, pour  $c_1$  et  $c_2$  dans  $]a, b[$ ,  $\int_a^{c_1} f(t) dt$  et  $\int_{c_2}^b f(t) dt$  sont convergentes.  
 et alors :  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^{c_1} f(t) dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt + \int_{c_2}^b f(t) dt$

En effet : En effet  $\int_a^b f$  CV  $\iff F$  a une limite réelle en  $a$  et  $b \iff \int_a^{c_1} f$  CV et  $\int_{c_2}^b f$  CV

et alors  $\int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \int_{c_2}^b f = F(c_1) - \lim_a F + F(c_2) - F(c_1) + \lim_b F - F(c_2) = \lim_b F - \lim_a F = \int_a^b f$

## 1.4 Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.

**Proposition.**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $]a, b[$ ,  
 Si  $f(x)$  admet une limite réelle quand  $x$  tend vers  $a^+$  et quand  $x$  tend vers  $b^-$ ,  
 alors l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente.

En effet : si on note  $g$  le prolongement par continuité de  $f|_{]a,b[}$  à  $[a, b]$  on a  $\int_a^b g$  converge donc  $\int_a^b f$

**Exemples :** Feuille\_Cours\_7.

**Remarques :**

- Certains disent dans cette situation que l'intégrale est "faussement impropre".  
*(terme non utilisé dans le programme)*

- Si  $f$  est continue sur  $]a, b[$  et si  $]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est prolongeable par continuité en  $a$  et  $b$   
 $x \mapsto f(x)$

alors l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente.

## 1.5 Généralisation.

### Définition.

Quand  $a$  désigne un réel ou  $-\infty$ ,  $b$  un réel ou  $+\infty$ ,  $n$  un entier naturel non nul et  $(a_0, \dots, a_n)$  tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

Pour  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  sauf (*éventuellement*) en tous les réels  $a_1, \dots, a_{n-1}$

Dire que l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente signifie que :

pour chaque  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , l'intégrale  $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$  est convergente.

et en cas de convergence de toutes ces intégrales, on définit :  $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$ .

*Illustration graphique.*

### Notation. (Extrait du programme)

Les notations  $\int_I f$ ,  $\int_I f(t) dt$ ,  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$  pourront, selon le contexte, désigner l'intégrale généralisée ou sa valeur.

**Méthode pratique générale.** voir exemples dans la feuille\_Cours\_7

❶ Déterminer les intervalles  $\left] a_k; a_{k+1} [ \right]_{0 \leq k \leq n-1}$ .

❷ Etudier pour chaque  $k$  entre 0 et  $n-1$ , la nature de l'intégrale  $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$ .

❸ En cas de convergence de toutes ces intégrales impropres, on conclut :

$$\int_a^b f(t) dt \text{ est convergente et } \int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$$

### Remarques :

• Si au moins une des intégrales  $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$  diverge alors  $\int_a^b f(t) dt$  diverge.

• On ne peut écrire  $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$  qu'à la fin du raisonnement qu'en cas de convergence.

**Proposition.** (*Intégrales sur un plus petit intervalle*)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  sauf (*éventuellement*) en nombre fini de réels de  $]a, b[$ ,

Si l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente alors

pour tous réels  $c$  et  $d$  vérifiant  $a \leq c < d \leq b$ , l'intégrale  $\int_c^d f(t) dt$  est convergente.

### Proposition.

Soient  $\alpha$  un réel et  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  sauf (*éventuellement*) en nombre fini de réels de  $]a, b[$ ,

Si  $\alpha \neq 0$  alors les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b \alpha f(t) dt$  sont de même nature.

*En effet :*

## Propriétés

$a$  est un réel ou  $-\infty$  et  $b$  un réel  $> a$  ou  $+\infty$ ,  
et  $f, g, f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions continues sur  $]a, b[$  sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

### 2.1 Relation de Chasles.

**Théorème :**

$$\begin{aligned} \text{Si } \int_a^b f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \text{alors, pour tout } (c_1, c_2, c_3) \in [a, b]^3, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt, \quad \int_{c_2}^{c_3} f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{c_1}^{c_3} f(t) dt \quad \text{convergent} \\ \text{et} \quad \int_{c_1}^{c_3} f(t) dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt + \int_{c_2}^{c_3} f(t) dt \end{aligned}$$

**Généralisation :** pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{Si } \int_a^b f(t) dt \text{ est convergente,} \\ \text{alors, quel que soit } (c_0, \dots, c_n) \in [a, b]^{n+1}, \text{ on a : } \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t) dt \text{ convergent} \\ \text{et} \quad \int_{c_0}^{c_n} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t) dt \end{aligned}$$

*Remarque :* Les  $c_k$  ne sont pas nécessairement dans l'ordre croissant et peuvent être égaux à  $a$  ou  $b$ .

**Exemples :** Voir la feuille\_Cours\_7\_bis

### 2.2 Linéarité.

**Théorème :**

$$\begin{aligned} \text{Si } \int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_a^b g(t) dt \text{ sont convergentes,} \\ \text{alors pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \text{ converge et} \\ \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

**Démonstration :**

**Exemples :** Voir la feuille\_Cours\_7\_bis

**Généralisation :**

Si pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , l'intégrale  $\int_a^b f_k(t) dt$  est convergente,  
alors pour tout  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ , l'intégrale  $\int_a^b \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t) \right) dt$  converge et

$$\int_a^b \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left( \int_a^b f_k(t) dt \right)$$

**Démonstration :**

**Exemples :** Voir la feuille\_Cours\_7\_bis

## 2.3 Positivité

On rappelle qu'on est sous l'hypothèse  $a < b$ .

**Théorème :**

Lorsque  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente,

**Si**  $\forall t \in ]a, b[, f(t) \geq 0$  **alors**  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

**Démonstration :**

**Exemples :** Voir la feuille\_Cours\_7\_bis

## 2.4 Croissance de l'intégrale.

**Théorème :**

Lorsque  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  sont convergentes,

**Si**  $\forall t \in ]a, b[, f(t) \leq g(t)$  **alors**  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

**Démonstration :**

**Exemples :** Voir la feuille\_Cours\_7\_bis

## 2.5 Stricte positivité.

$a$  désigne un réel ou  $-\infty$ ,  $b$  un réel ou  $+\infty$  et  $\boxed{a < b}$ .

**Théorème :**

**Si**  $\begin{cases} f \text{ est continue sur } ]a, b[, \\ \forall t \in ]a, b[, f(t) \geq 0, \\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{cases}$  **alors**  $\forall t \in ]a, b[, f(t) = 0$

**Démonstration.** (Exercice à faire)

**Exemple** d'application vu dans *la feuille\_Cours\_7\_bis* :

Si  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et que  $\int_0^{+\infty} (f(x) - x^2)^2 dx = 0$  alors on peut en déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ .

**Remarques :**

- On peut remplacer dans ce théorème l'intervalle  $]a, b[$  par tout intervalle  $I : ]a, b], [a, b[$  ou  $[a, b]$

**En effet :**

- Attention à l'argument "  $f$  est continue sur  $I$ ".

On peut trouver une fonction positive sur  $]0, 1[$ , telle que  $\int_0^1 f(t) dt = 0$  et qui n'est pas nulle sur  $]0, 1[$ .

(qui n'est pas la fonction nulle)

**Exemple :** (avec un illustration graphique) :

**Corollaire 1 :**

Lorsque  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente,

**Si**  $\begin{cases} f \text{ est continue sur } ]a, b[, \\ \forall t \in ]a, b[, f(t) \geq 0, \\ f \text{ n'est pas la fonction nulle sur } ]a, b[ \end{cases}$  **alors**  $\int_a^b f(t) dt > 0$

**En effet :**

**Exemple d'application :** L'intégrale  $\int_0^1 t \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$  converge et  $\int_0^1 t \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt > 0$

**Corollaire 2 :**

Pour  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  sauf peut-être en un nombre fini de points.

Lorsque  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente,

**Si**  $\forall t \in ]a, b[, f(t) > 0$  **alors**  $\int_a^b f(t) dt > 0$

**En effet :**

**Exemples d'utilisation :**

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt > 0$
- $\int_0^1 (\ln(t))^3 dt < 0$

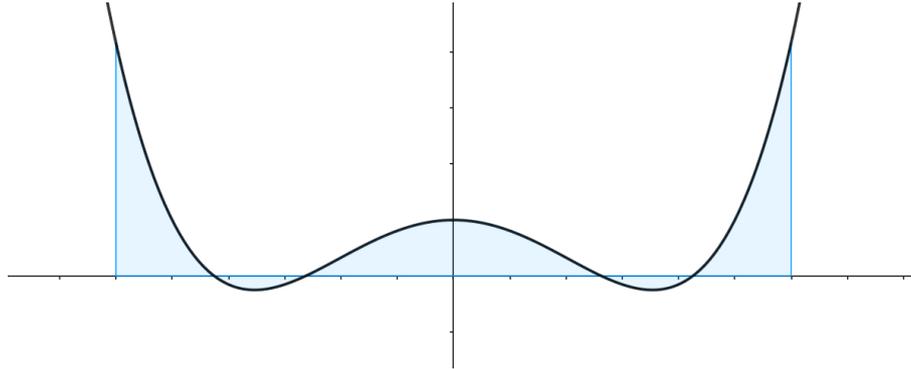
## 2.6 Parité.

Ici  $a$  est un réel positif ou  $+\infty$  et  $f$  est continue sur  $] -a, a[$  sauf en un nombre fini de réels.

**Proposition :**

Lorsque  $f$  est paire,  
 $\int_{-a}^a f(t) dt$  est convergente **si, et seulement si,**  $\int_0^a f(t) dt$  est convergente  
et alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$

**En effet :**

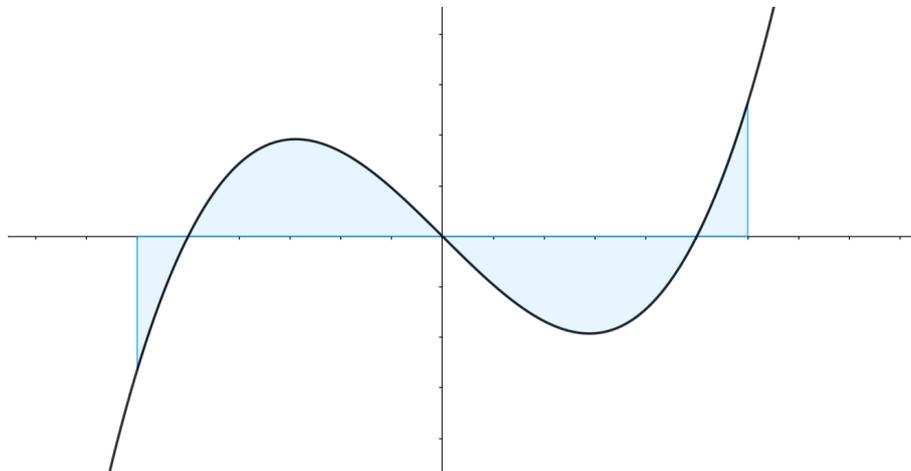


**Exemples :** Voir la feuille\_Cours\_7\_bis

**Proposition :**

Lorsque  $f$  est impaire,  
 $\int_{-a}^a f(t) dt$  est convergente **si, et seulement si,**  $\int_0^a f(t) dt$  est convergente  
et alors  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$

**En effet :**



**Exemples :** Voir la feuille\_Cours\_7\_bis

## Théorèmes de convergences.

### 3.1 Théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs

**Théorème.**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b[$ ,

Si  $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$

et si  $\int_a^b g(t) dt$  est convergente alors  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente.

**Démonstration.**

$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  et  $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$  sont croissantes (car les intégrandes sont positifs)

L'encadrement et la "croissance de l'intégrale" donne  $\forall x \in [a, b[, 0 \leq F(x) \leq G(x)$

$$\text{donc } \forall x \in [a, b[, 0 \leq F(x) \leq \underbrace{\int_a^b g(t) dt}_{\in \mathbb{R}}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de limite monotone à  $F$  pour conclure.

**Remarque :** En prenant la contraposée, on obtient :

Si  $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$  et si  $\int_a^b f(t) dt$  est divergente, alors  $\int_a^b g(t) dt$  est divergente.

**Corollaires.**

❶ Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $]a, b]$ ,

Si  $\forall t \in ]a, b]$ ,  $0 \leq f(t) \leq g(t)$  et si  $\int_a^b g(t) dt$  est convergente alors  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente

❷ Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $]a, b[$  (sauf en un nombre fini de réels),

Si  $\forall t \in ]a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$  (sauf en un nombre fini de réels).

et si  $\int_a^b g(t) dt$  est convergente alors  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente.

**Remarques.**

- Comme pour les séries : On ne passe pas à l'intégrale!!!
- On compare les intégrandes positifs pour en déduire la nature d'une intégrale.
- Ce théorème permet uniquement de trouver la nature de  $\int_a^b f(t) dt$  ou de  $\int_a^b g(t) dt$
- Ce théorème ne permet pas de calculer la valeur de  $\int_a^b f(t) dt$  quand il y a convergence.
- Attention ici la conclusion du théorème n'est pas : "elles sont de même nature".

## 3.2 Théorème de convergence par équivalence des intégrandes positifs.

**Théorème.**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b[$ ,

Si  $\forall t \in [a, b[$ ,  $g(t) \geq 0$  et si  $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$ , alors

❶ Si  $\int_a^b g(t) dt$  converge alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge.

❷ Si  $\int_a^b g(t) dt$  diverge alors  $\int_a^b f(t) dt$  diverge.

**Démonstration.** (*Rapidement*)

On se place dans le cas où  $g$  ne s'annule pas sur  $[a, b[$ ,

•  $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$  donc il existe  $c \in [a, b[$ ,  $\forall t \in [c, b[$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{3}{2}$

• et  $g(t) \geq 0$  donc  $\forall t \in [c, b[$ ,  $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence par comparaison pour conclure.

**Corollaire.**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $]a, b]$ ,

Si  $\forall t \in ]a, b]$ ,  $g(t) \geq 0$  et si  $f(t) \underset{t \rightarrow a^+}{\sim} g(t)$ , alors

❶ Si  $\int_a^b g(t) dt$  converge alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge.

❷ Si  $\int_a^b g(t) dt$  diverge alors  $\int_a^b f(t) dt$  diverge.

**Remarques.**

• Ce théorème permet uniquement de trouver la nature de  $\int_a^b f(t) dt$ .

• Ce théorème ne permet pas de calculer la valeur de  $\int_a^b f(t) dt$ , ni même son signe.

• On peut résumer ❶ et ❷ en :

$\int_a^b g(t) dt$  converge si, et seulement si,  $\int_a^b f(t) dt$  converge.

• On peut résumer ❶ et ❷ en :

$\int_a^b g(t) dt$  et  $\int_a^b f(t) dt$  sont de même nature.

## Absolue convergence.

$a$  désigne un réel ou  $-\infty$  et  $b$  un réel  $> a$  ou  $+\infty$ ,

### Définition.

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

Dire que  $\int_a^b f(t) dt$  est absolument convergente signifie que  $\int_a^b |f(t)| dt$  est convergente

### Théorème :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  sauf éventuellement en un nombre fini de réels.

Si  $\int_a^b f(t) dt$  est absolument convergente

alors  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente et  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

**Démonstration.** (voir feuille\_cours\_7\_quater)

### Proposition

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions continues sur  $]a, b[$  sauf éventuellement en un nombre fini de réels, et  $\alpha, \beta$  deux réels,

Si  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  sont absolument convergentes

alors  $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt$  est absolument convergente.

*Autrement dit : L'ensemble des fonctions continues sur  $]a, b[$ , sauf éventuellement en un nombre fini de réels, dont l'intégrale est absolument convergente sur  $]a, b[$  est stable par combinaison linéaire.*

### Remarque

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  sauf éventuellement en un nombre fini de réels,

Si  $f$  est de signe constant sur  $]a, b[$  alors on a l'équivalence :

$\int_a^b f(t) dt$  est convergente si, et seulement si,  $\int_a^b |f(t)| dt$  est absolument convergente.

## Intégrales impropres usuelles.

### 5.1 Loi uniforme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) dt = b - a$$

### 5.2 Loi exponentielle

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

### 5.3 Loi normale

Centrée réduite. (*admis*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

Soient  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \sigma\sqrt{2\pi}$$

*A savoir redémontrer.*

### 5.4 Compléments : Intégrales de Riemann.

*Hors programme, voir feuille\_Exo\_14*

	$\alpha \leq 0$	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$1 < \alpha$
$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$	CV	CV	DV	DV
$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt =$	$\frac{1}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$		
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$	DV	DV	DV	CV
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt =$				$\frac{1}{\alpha-1}$

Des exemples de convergents.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt = 2$$

Des exemples de divergents.

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt \text{ diverge} \quad \int_0^1 \frac{1}{t} dt \text{ diverge} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \text{ diverge} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \text{ diverge}$$

Dans ce paragraphe,  $a$  et  $b$  vérifient  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

## 6.1 Intégrations par parties.

**Théorème.** (*Intégration par parties*)

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $]a, b[$ ,

Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x) \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) \in \mathbb{R}$  et  $\int_a^b u'(t)v(t) dt$  converge (*Trois conditions*)

alors  $\int_a^b u(t)v'(t) dt$  est convergente et

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x) - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

**Démonstration.**

**Exemples.** Voir la feuille Cours\_7\_Quinquies

**En pratique** on n'utilise pas souvent ce théorème, il est plus simple de chercher une primitive.

Voir **Ex 5** de la feuille\_calcul\_8 pour le calcul de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$

**Corollaire.**

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $]a, b[$ ,

Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x) \in \mathbb{R}$ , et  $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) \in \mathbb{R}$ ,

alors  $\int_a^b u(t)v'(t) dt$  et  $\int_a^b u'(t)v(t) dt$  sont de même nature.

**En effet.**

## 6.2 Changement de variable.

**Théorème.** (*Changement de variable  $x = \varphi(t)$* )

Soient  $\varphi$  et  $f$  deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $\varphi$  est de classe  $C^1$  et strictement monotone sur  $]a, b[$ , on note  $\alpha = \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$  et  $\beta = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$

et si  $f$  est continue sur  $] \alpha, \beta [$ ,

alors  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  converge si, et seulement si,  $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$  converge

et en cas de convergence :  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

**Démonstration.**

**Exemples.** Voir la feuille Cours\_7\_Quinquies

**Corollaire.** (*f* strictement croissante)

Soient  $\varphi$  et  $f$  deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta$  des réels ou  $-\infty$  ou  $+\infty$ .  
 Si  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow ]\alpha, \beta[$  est de classe  $C^1$ , strictement croissante et bijective, et si  $f$  est continue sur  $] \alpha, \beta[$ ,  
 alors  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  converge si, et seulement si,  $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$  converge  
 et en cas de convergence :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

**En effet :**  $\alpha = \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$  et  $\beta = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$

**Corollaire.** (*f* strictement décroissante)

Soient  $\varphi$  et  $f$  deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta$  des réels ou  $-\infty$  ou  $+\infty$ .  
 Si  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow ]\beta, \alpha[$  est de classe  $C^1$ , strictement décroissante et bijective, et si  $f$  est continue sur  $] \beta, \alpha[$ ,  
 alors  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  converge si, et seulement si,  $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$  converge  
 et en cas de convergence :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

**En effet :**  $\alpha = \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$  et  $\beta = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$

**En pratique :**

- ❶ On identifie la fonction  $\varphi$  et on vérifie qu'elle possède les propriétés requises.
- ❷ on cherche  $a, b, \alpha$  et  $\beta$  tels que  $t$  va de  $a$  à  $b$  et  $x$  de  $\alpha$  à  $\beta$ .
- ❸ on remplace  $dx$  par  $\varphi'(t)dt$  ou  $\varphi'(t)dt$  par  $dx$ .
- ❹ on remplace  $x$  par  $\varphi(t)$  ou  $\varphi(t)$  par  $x$ .

$$\underbrace{\int_{\alpha}^{\beta}}_{\text{❷}} \underbrace{f(x)}_{\text{❹}} \underbrace{dx}_{\text{❸}} = \underbrace{\int_a^b}_{\text{❷}} \underbrace{f(\varphi(t))}_{\text{❹}} \underbrace{\varphi'(t) dt}_{\text{❸}}$$

**Exemples.** Voir la feuille Cours\_7\_Quinquies

**Corollaire.** *Changement de variable affine*  $x = mt + p$ .

Soient  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $m, p$  deux réels tels que  $m \neq 0$   
 On note :  $\alpha = \lim_{t \rightarrow a^+} (mt + p)$  et  $\beta = \lim_{t \rightarrow b^-} (mt + p)$   
 Si  $f$  est continue sur  $] \alpha, \beta[$ ,  
 alors  $\int_a^b f(mt + p) m dt$  converge si, et seulement si,  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  converge  
 et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(mt + p) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{1}{m} dx$$

**Remarque :**

- Ici les conditions d'utilisation du théorème sont plus simples, on peut alléger la rédaction.

**Exemples.** Voir la feuille Cours\_7\_Quinquies