Correction de la feuille_Calcul_7 : Intégrales généralisées.

Ex 1 : • $\boldsymbol{I_1}$

(Rédaction 1)

La fonction $f : t \longmapsto \ln(t)$ est continue sur $\left]0,1\right]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0.

de plus la fonction $F : t \longmapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de f sur $\left]0,1\right]$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} F(t) = 0$

(En effet, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$ limite du cours "croissance comparée").

Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut : $F(1) - \displaystyle\lim_{t\to 0^+} F(t) = -1$

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1}$$

(Rédaction 2)

La fonction $f : t \longmapsto \ln(t)$ est continue sur $\left]0,1\right]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0.

Pour $x \in \left]0,1\right]$, $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln(t) - t\Big]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$

(En effet, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ limite du cours "croissance comparée").

donc

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1}$$

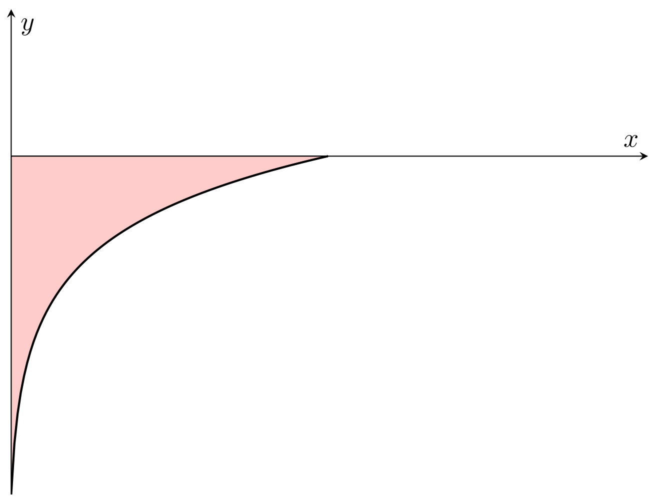

FIGURE 1 – Illustration graphique de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$.

• $\boldsymbol{I_2}$

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$ est continue sur $\left]1,\, 2\right]$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 1.

Pour $x \in]1, 2]$, $\displaystyle\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t-1}\right]_x^2 = 2 - 2\sqrt{x-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$ donc

$$\boxed{\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t = 2}$$

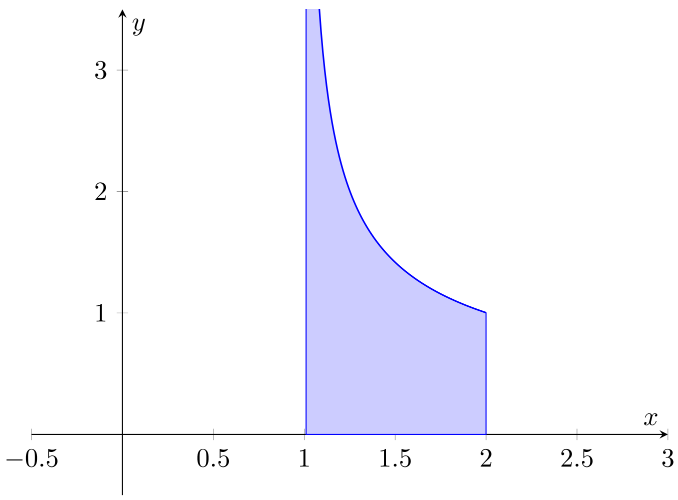

Figure 2 – Illustration graphique de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt = 2.$

• $\boldsymbol{I_3}$

La fonction $f : t \longmapsto e^t$ est continue sur $]-\infty; 0]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t\,\mathrm{d}t$ est impropre en $-\infty$.

de plus la fonction $F : t \longmapsto e^t$ est une primitive de f sur $]-\infty, 0]$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$.

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut : $F(0) - \displaystyle\lim_{t\to-\infty} F(t) = 1$

$$\boxed{\int_{-\infty}^0 e^t\,\mathrm{d}t \text{ est convergente} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 e^t\,\mathrm{d}t = 1}$$

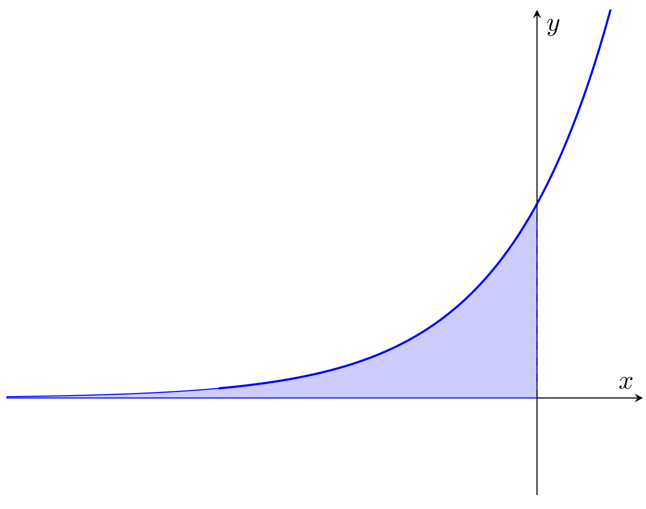

Figure 3 – Illustration graphique de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t\,dt = 1.$

• $\boldsymbol{I_4}$

$\forall t \in]1,2[,\ \lfloor t \rfloor = 1$ donc $\displaystyle\int_1^2 \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \int_1^2 1 \,\mathrm{d}t$ *(intégrale d'une fonction continue sur un segment)*

donc

$$\boxed{\int_1^2 \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_1^2 \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = 1}$$

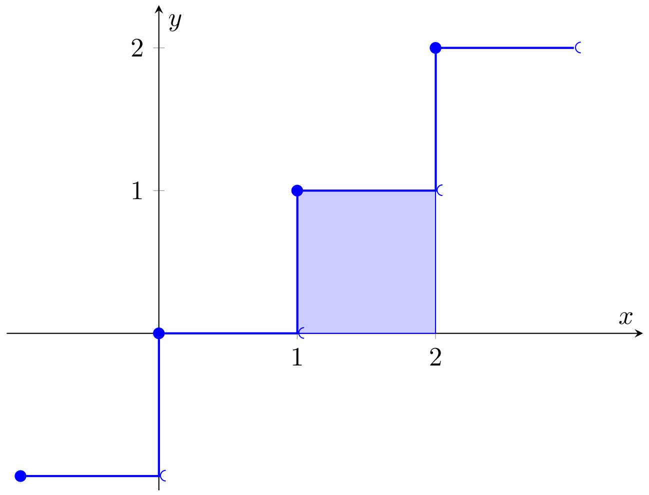

FIGURE 4 – Illustration graphique de $\displaystyle\int_1^2 \lfloor t \rfloor \, dt = 1$.

• $\boldsymbol{I_5}$

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0.

De plus la fonction $F : t \longmapsto -\dfrac{1}{t}$ est une primitive de f sur $]0,1]$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} F(t) = +\infty$, donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est divergente}}$$

• $\boldsymbol{I_6}$

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.

De plus la fonction $F : t \longmapsto -\dfrac{1}{t}$ est une primitive de f sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) - F(1) = 0 - (-1)$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1}$$

• $\boldsymbol{I_7}$

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0.

la fonction $F : t \longmapsto \ln(t)$ est une primitive de f sur $]0,1]$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} F(t) = -\infty$, donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est divergente}}$$

- $\boldsymbol{I_8}$

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.

de plus pour $x \in [0;+\infty[$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \Big[\arctan(t)\Big]_0^x \\ &= \arctan(x) - 0 \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

Les quatre dernières intégrales divergent

- $\boldsymbol{I_{12}}$

La fonction $f : t \longmapsto \tan(t)$ est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \tan(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.

de plus pour $x \in [0;+\infty[$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \tan(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[-\ln(\cos(t))\Big]_0^x \\ &= -\ln(\cos(x)) \\ &\underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \tan(t)\,\mathrm{d}t \text{ est divergente}}$$

Ex 2 :

- $\boldsymbol{I_1}$

La fonction $f : t \longmapsto te^{-t}$ est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.

de plus pour $x \in [1;+\infty[$,

$$\begin{aligned}\int_1^x te^{-t}\,\mathrm{d}t &= \Big[t(-e^{-t})\Big]_1^x - \int_1^x 1\times(-e^{-t})\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(} t\mapsto t \textit{ et } t\mapsto -e^{-t} \textit{ sont de classe } C^1 \textit{ sur } [1,x]\textit{)} \\ &= -xe^{-x} + e^{-1} + \int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -xe^{-x} + e^{-1} + \Big[-e^{-t}\Big]_1^x \\ &= -xe^{-x} + e^{-1} + e^{-1} - e^{-x} \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,e^{-1} \qquad \textit{(croissance comparée pour la limite de } xe^{-x}\textit{)}\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_1^{-\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = 2e^{-1}}$$

- $\boldsymbol{I_2}$

$f : t \longmapsto te^{-t^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

On remarque que f est impaire donc on étudie $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

La fonction $F : t \longmapsto -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ est une primitive de f sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente
et comme f est impaire on peut conclure

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0}$$

- ***I*$_3$**
  - La fonction $f : t \longmapsto t^2e^{-t^3}$ est continue sur $[0, +\infty[$,
  - la fonction $F : t \longmapsto -\dfrac{1}{3}e^{-t^3}$ est une primitive de f sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^3}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) - F(0) = \frac{1}{3}$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^3}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} t^2e^{-t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}}$$

$I_4 = I_5$? (non corrigé) Elle diverge.

- ***I*$_6$**
  - La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est continue sur $]1, +\infty[$,
  - la fonction $F : t \longmapsto \ln(\ln(t))$ est une primitive de f sur $]1, +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ donc

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \text{ est divergente}}$$

Ex 3 : 1) f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0,

- Etudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ qui est de même nature que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^t\,\mathrm{d}t$ et égales en cas de convergence.

  $t \longmapsto e^t$ est continue sur $]-\infty, 0]$, l'intégrale est impropre en $-\infty$.

  Pour $x \in \big]-\infty\,,\,0\big]$,

$$\begin{aligned}\int_x^0 e^t\,\mathrm{d}t &= \Big[e^t\Big]_x^0 \\ &= 1 - e^x \\ &\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{0} f_1(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut 1.}$$

- Etudions $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ qui est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et égales en cas de convergence.

  $t \longmapsto 2e^{-t}$ est continue sur $[\,0\,, +\infty[$, l'intégrale est impropre en $+\infty$.

  Pour $x \in \big[\,0\,, +\infty\big[$,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t\,\mathrm{d}t &= \Big[-2e^{-t}\Big]_0^x \\ &= -2e^{-x} - (-2) \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut 2.}$$

En conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut 3.}}$$

2) f_2 est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

- Etudions $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t$ qui est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et égales en cas de convergence.

  $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[\,1\,,+\infty[$, l'intégrale est impropre en $+\infty$.

  Pour $x\in\big[\,1\,,+\infty\big[$,

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^x\\ &= -\frac{1}{x}-(-1)\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } 1.$$

- , sachant que f_2 est paire on en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{-1} f_2(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } 1.$$

- Etudions $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_2(t)\,\mathrm{d}t$ qui est de même nature que $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t$ et égales en cas de convergence.

  L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 2 donc

$$\int_{-1}^{1} f_2(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } 2.$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } 4.}$$

3) Etudions $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_3(t)\,\mathrm{d}t$ qui est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$

   Pour $x\in[0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_3(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(t)\,\mathrm{d}t \text{ est divergente.}}$$

4) f_4 est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

- Etudions $\displaystyle\int_{-1}^{0} f_4(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(t^2+1)\,\mathrm{d}t$ *(de même nature et égales en cas de convergence)*

  $t\longmapsto t^2+1$ est continue sur $[\,-1\,,\,0\,]$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}(t^2+1)\,\mathrm{d}t &= \Big[\frac{t^3}{3}+t\Big]_{-1}^{0}\\ &= 0-\Big(-\frac{1}{3}-1\Big)\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{0} f_4(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } \frac{4}{3}.$$

- Etudions $\displaystyle\int_0^1 f_4(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *(de même nature et égales en cas de convergence)*

  $t\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\big]\,0\,,1\big]$, l'intégrale est impropre en 0.

Pour $x \in \left]\, 0\,, 1\right]$,

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \Big[2\sqrt{t}\Big]_x^1 \\ &= 2 - 2\sqrt{x} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 f_4(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } 2.$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_4(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } \frac{10}{3} \qquad \left(= 2 + \frac{4}{3}\right)}$$

5) Etudions $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_5(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ *(de même nature et égales en cas de convergence)*

Pour $x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_5(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_5(t)\,\mathrm{d}t \text{ est divergente.}}$$

6) f_6 est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

- f_6 est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_6(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 0.
- Etudions $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_6(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *(de même nature et égales en cas de convergence)*

  Pour $x \in \left[\,0\,, +\infty\right[$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \Big[\arctan(t)\Big]_0^x \\ &= \arctan(x) \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} f_6(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_6(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et vaut } \frac{\pi}{2}.}$$

Ex 4 : ***I_1***

Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, \infty[$ la fonction est nulle donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

et comme f est constante égale à 1 sur $[0, 1]$, il vient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,1[}(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,1[}(t)\,\mathrm{d}t = 1}$$

I_2

Sur $]-\infty, 0[$ l'intégrande est nul donc $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ *(de même nature et égales en cas de convergence)*

or pour $x \in [0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-2t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}}$$

***I*₄**

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} k\,\mathrm{d}t = k$

$$\boxed{\int_0^5 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_0^5 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t = 10}$$

***I*₅**

Rapidement.

D'une part $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-|t+1|}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} e^{t+1}\,\mathrm{d}t$ et cette intégrale converge avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{t+1}\,\mathrm{d}t = 1$

D'autre part $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} e^{-|t+1|}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{+\infty} e^{-t-1}\,\mathrm{d}t$ et cette intégrale converge avec $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} e^{-t-1}\,\mathrm{d}t = 1$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t+1|}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t+1|}\,\mathrm{d}t = 2}$$

Remarque : On reverra cet exercice quand on aura le théorème de changement de variable.

Ex 5 : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0.

$\displaystyle\int_{-2}^2 (t^3 - 8)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$\displaystyle\int_0^3 \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0 car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ *(Limite d'un taux d'accroissement)*

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $-\infty$.

$\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0 et faussement impropre en 1 car $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1$

(Limite d'un taux d'accroissement)

$\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0 car $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0$