La colle commencera par une question de cours, puis un exercice relativement simple.

Pour la question de cours : Vérifier que la différence entre définition et théorème est bien comprise.

Pour l'exercice : une application directe du cours sur les applications linéaires.

On pourra revenir sur les capacités importantes des cours matrices, systèmes ou espaces vectoriels :

Montrer, en dimension connue, qu'une famille est une base.

La notion de famille libre, de famille génératrice.

Inverser une matrice. Résoudre un système. Puissances de matrice ...

Et enfin si ces deux obstacles sont passés : des exercices d'algèbre linéaire moins élémentaires (*il est temps de se mettre au niveau*) sur le programme de première ou de deuxième année.

Les démonstrations de cours classiques pourront être données en exercices.

• Applications linéaires.

Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.

Notation $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$. Notation f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque.

Propriétés de ces opérations.

Noyau. Lien avec l'injectivité. Image. Lien avec la surjectivité.

On montre que le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.

• En dimension finie.

Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.

Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Rang d'une application linéaire. Théorème du rang.

Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

L'application $E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.
 $v \longmapsto \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v)$

Pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité. (*Contre-exemple en dimension infinie*)

Matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, une base ayant été choisie pour chacun d'eux.

Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque d'un isomorphisme.

Matrice de f^n .

Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible,
 (*et qu'il suffit pour cela de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite*).

Rang d'une application linéaire. Théorème du rang.

Changement de base. Matrice de changement de base. (notation $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$)

Action sur les coordonnées d'un vecteurs. Action sur la matrice d'un endomorphisme.

"Toute identification entre vecteur de $\mathbb{K}^n$ et sa représentation matricielle dans une base, même canonique, et à éviter".

Définition du noyau et de l'image d'une matrice.

Théorème du rang pour une matrice.

Matrices semblables. (*Utilisation pour le calcul des puissances de matrices*).

Extrait du programme : *"On ne parlera pas de matrices équivalentes".*

Nous n'avons pas encore vu le chapitre sur les éléments propres et la diagonalisation.

• Informatique :

Dichotomie. Méthode des rectangles. Méthode d'Euler.

Remarques et exemples de questions de cours :

Question de cours sur : "Applications linéaires".

On travaillera dans tous les espaces vectoriels de référence.

Démontrer qu'une application est ou non linéaire.

Déterminer une base du noyau ou de l'image d'une application linéaire.

Démonstration de : $\text{Ker}(f)$ est sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démontrer le lien entre $\text{Ker}(f)$ et l'injectivité de f .

Donner la caractérisation quantifiée des notions injective, surjective ou bijective.

(pour une application quelconque, pas nécessairement linéaire).

Déterminer la matrice d'une application linéaire dans deux bases.

Définition de la matrice de passage entre deux bases d'un même espace vectoriel.

Donner une des deux formules de changement de base.

Enoncer le théorème du rang pour une application linéaire.

Démonstration de la relation : $\text{coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \text{coord}_{\mathcal{B}}(u)$

Définition de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Calcul du rang d'une application linéaire.

- Donner la définition de deux matrices semblables et sa caractérisation avec les endomorphismes.

- Enoncer le théorème du rang pour une matrice rectangulaire.

On vérifiera que les formules suivantes sont connues et comprises (*Les élèves doivent pouvoir donner le contexte*).

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}))$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^m) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^m$$

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E)$$

$$\text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Coord}_{\mathcal{B}'}(u)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Informatique : Application d'une des trois méthodes numériques sur un exemple.

Le colleur pourra donner un problème sans donner la méthode.