I. Résultats préliminaires

1) a. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 D_3 X = Y &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} y = a \\ z = b \\ x = c \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = c \\ y = a \\ z = b \end{cases} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

donc D_3 est inversible et $D_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque pour ceux qui ne parviennent pas à retenir cette rédaction.

Si quel que soit Y le système $AX = Y$ admet une unique solution alors A est inversible et la matrice B donnant la solution $X = BY$ est l'inverse de A .

Une autre rédaction possible.

On utilise la méthode du pivot de Gauss sur la matrice augmentée $(D_4|I_4)$ par des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant dans l'ordre les opérations : $L_4 \leftrightarrow L_3$, $L_3 \leftrightarrow L_2$ et $L_2 \leftrightarrow L_1$ il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que D_4 est inversible et $D_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 D_p X = Y &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_3 = y_2 \\ \vdots \\ x_1 = y_p \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 = y_p \\ x_2 = y_1 \\ \vdots \\ x_p = y_{p-1} \end{cases} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

donc D_p est inversible et $D_p^{-1} = D_p^T$

On pourra bientôt avoir un argument plus efficace.

On note que $(C_1, \dots, C_p)$ les colonnes de D_p .

On remarque que $(C_1, \dots, C_p)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ ($\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket, C_i^T C_j = \mathbb{1}_{i=j}$)

donc $D_p^T \times D_p = D_p \times D_p^T = I_n$ et ainsi :

$$D_p \text{ est inversible et } D_p^{-1} = D_p^T$$

2) a. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, (X, Y) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})^2$ on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$

d'une part $\alpha X + \beta Y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_p + \beta y_p \end{pmatrix}$ donc $f(\alpha X + \beta Y) = \sum_{k=1}^p (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=1}^p x_k + \beta \sum_{k=1}^p y_k$

d'autre part : $\alpha f(X) + \beta f(Y) = \alpha \sum_{k=1}^p x_k + \beta \sum_{k=1}^p y_k$

donc $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$,

f est une application $\mathbb{C}$ -linéaire

b. • (Une première approche en utilisant le fait que f est linéaire)

En posant $u = (1, -1, 0, \dots, 0)$ (ce qui est possible car $p \geq 3$) on remarque que : $f(u) = (0, 0, \dots, 0)$

donc $\ker(f) \neq \{(0, \dots, 0)\}$ et ainsi f n'est pas injective.

• (Une deuxième approche avec la définition d'un injection)

En posant $u = (1, -1, 0, \dots, 0)$ (ce qui est possible car $p \geq 3$) on remarque que : $f(u) = f((0, 0, \dots, 0))$ or $u \neq (0, 0, \dots, 0, 0)$ donc f n'est pas injective.

c. • **Démonstration 1.**

$f((1, \dots, 1)) = p \neq 0$ donc f n'est pas l'application nulle donc $\dim(\text{Im}(f)) \geq 1$

de plus $\text{Im}(f) \subset \mathbb{C}$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{C}$ et ainsi f est surjective.

• **Démonstration 2.**

$\text{Im}(f)$ est l'espace engendré par les images des vecteurs de la base canonique,

Or l'image de tous les vecteurs de la base canonique est 1 donc $\text{Im}(f) = \text{Vect} \langle 1 \rangle = \mathbb{C}$ donc

f est surjective.

• **Démonstration 3.** (uniquement avec la définition d'une surjection.)

Tout nombre complexe a possède la matrice $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ comme antécédent par f donc

f est surjective.

d. On vient de montrer que le rang de f est 1 et on sait que la dimension de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ est p

donc le théorème du rang appliqué à f donne : $\dim(\ker(f)) = p - 1$

3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} z_k &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right) \right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right) \right)^p}{1 - \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)} \quad \text{car comme } p \geq 3 \text{ on a } \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right) \neq 1 \\ &= 0 \quad \text{car } \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right) \right)^p = \exp(2i\pi) = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p-1} z_k = 0}$$

Interprétation géométrique : La somme $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$. (Hors programme : O isobarycentre des points $(A_k)_{0 \leq k \leq n-1}$)

4) Soit $z \in \mathbb{C}$, on note : $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.

$$\begin{aligned} z^p = 1 &\iff r^p e^{ip\theta} = 1 \\ &\iff r^p = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, \quad p\theta = 0 + 2k\pi \\ &\iff r = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{2k\pi}{p} \\ &\iff r = 1 \text{ et } \exists k \in [0; n-1], \quad \theta = \frac{2k\pi}{p} \\ &\iff \exists k \in [0; n-1], \quad z = \exp\left(\frac{2ik\pi}{p}\right) \end{aligned}$$

On a démontré ce que l'énoncé admet :

L'équation $z^p = 1$ possède exactement p solutions distinctes : $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$

II. Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle.

1) On applique la formule des probabilités totales le système complet d'événements $((U_n = k))_{k \in [0, p-1]}$:

$$P(U_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{p-1} P_{U_n=j}(U_{n+1} = i) \times P(U_n = j)$$

On a bien $X_{n+1} = MX_n$, où M est la matrice carrée dont les coefficients sont les $P_{U_n=j}(U_{n+1} = i)$.

Lorsque la particule se trouve en A_j , elle ne peut se déplacer que vers A_{j+1} ou A_{j-1} (en notant $A_p = A_0$ et $A_{-1} = A_{p-1}$), et ceci avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$P_{U_n=j}(U_{n+1} = i) \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i = j + 1 \quad (i = 0 \text{ si } j = p - 1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } i = j - 1 \quad (i = p - 1 \text{ si } j = 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a ainsi obtenu la matrice qui a des $1/2$ sur la surdiagonale, la sousdiagonale, et les coins en haut à droite et en bas à gauche, et des 0 partout ailleurs. On reconnaît :

$$M_p = \frac{1}{2} (D_p + D_p^T).$$

En posant $M_p = \frac{1}{2} (D_p + D_p^T)$ qui est dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on a : pour tout entier n , $X_{n+1} = M_p X_n$.

2) La relation précédente permet de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M_p^n X_0$, et comme au début la particule est en A_0 ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M_p^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) On a vu au début du sujet que $D_p^T = D_p^{-1}$ donc on a bien :

$$M_p = \frac{1}{2} (D_p + D_p^{-1})$$

4) a.

$$\begin{aligned} M_3 P &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M_3 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que P est inversible

$$\text{rg}(P) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2+L_1 \rightarrow L_2}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3+L_2 \rightarrow L_3}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} = 3$$

or $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

P est inversible

b. On remarque que les colonnes de MP_3 sont proportionnelles à celles de P ,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc en posant : } \Delta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ on a : } P\Delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{en posant : } \Delta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ on a bien } \Delta \text{ diagonale et } M_3P = P\Delta$$

c. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_3^n = P\Delta^n P^{-1}$.

• Pour $n = 0$,

$$\text{d'une part } M_3^0 = I_3 \text{ et d'autre part } P\Delta^0 P^{-1} = PP^{-1} = I_3$$

$$\text{donc } M_3^0 = P\Delta^0 P^{-1}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_3^n = P\Delta^n P^{-1}$,

$$\begin{aligned} M_3^{n+1} &= M_3 M_3^n \\ &= M_3 P\Delta^n P^{-1} && \text{en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ &= P\Delta\Delta^n P^{-1} && \text{car } M_3P = P\Delta \end{aligned}$$

$$\text{on a bien : } M_3^{n+1} = P\Delta^{n+1} P^{-1}$$

En conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, M_3^n = P\Delta^n P^{-1}$$

d.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} && \iff && \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ c \end{pmatrix} \\ &&& \iff && \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a+b+c \end{pmatrix} \\ &&& \iff && \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3a \\ -3a-3b \\ a+b+c \end{pmatrix} \\ &&& \iff && \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2a+b+c \\ -a-b+2c \\ a+b+c \end{pmatrix} \\ &&& \iff && \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -a+2b-c \\ -a-b+2c \\ a+b+c \end{pmatrix} \\ &&& \iff && \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 X_n &= M_p^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= P \Delta^n P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \mathbb{P}(U_n = 1) \\ \mathbb{P}(U_n = 2) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. $\mathbb{P}(U_n = k)$ tend vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$

Interprétation : Lorsque n est suffisamment grand les trois positions sont équiprobables.

5) (Les arguments utilisés ici ont été vus dans une interrogation)

Montrons que Q^T est inversible.

$$\text{Soit } (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p \text{ tel que } Q^T \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En notant : $P = \sum_{j=0}^{p-1} a_j X^j$, on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, $P(z_k) = 0$

P est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$ et qui possède p racines distinctes donc P est le polynôme nul, ce qui entraîne que $(a_0, \dots, a_{p-1}) = (0, \dots, 0)$,

Le système homogène $Q^T X = 0$ admet une et une seule solution donc Q^T est inversible et ainsi :

Q est inversible

6)

$$\begin{aligned}
 D_p Q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ddots & & & z_{p-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & \ddots & \ddots & & z_{p-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & z_{p-1}^{p-2} \\ z_0^{p-1} & z_1^{p-1} & \cdots & \cdots & z_{p-2}^{p-1} & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \ddots & & & z_{p-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & \ddots & \ddots & & z_{p-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & z_{p-1}^{p-2} \\ z_0^{p-1} & z_1^{p-1} & \cdots & \cdots & z_{p-2}^{p-1} & z_{p-1}^{p-1} \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$D_p Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ddots & & & z_{p-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & \ddots & \ddots & & z_{p-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & z_{p-1}^{p-2} \\ z_0^{p-1} & z_1^{p-1} & \cdots & \cdots & z_{p-2}^{p-1} & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix} \quad \text{car } \forall k, z_k^p = 1$$

En prenant $\Delta_p = \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix}$, on a bien une matrice diagonale et $D_p Q = Q \Delta_p$

7) • Δ_p est une matrice diagonale sans zéro sur la diagonale donc elle est inversible et

$$\Delta_p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_1} & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix}$$

• la relation de la question précédente donne $D_p = Q \Delta_p Q^{-1}$ ce qui donne $D_p^{-1} = Q \Delta_p^{-1} Q^{-1}$

• La question 3) a donné : $M_p = \frac{1}{2}(D_p + D_p^{-1})$ qui implique

$$M_p = \frac{1}{2} Q \begin{pmatrix} z_0 + \frac{1}{z_0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 + \frac{1}{z_1} & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} + \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

De plus les formules d'Euler donnent : $\frac{1}{2} \left(z_k + \frac{1}{z_k} \right) = \cos \left(\frac{2k\pi}{p} \right)$, ce qui entraînent :

$$M_p = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cos \left(\frac{2\pi}{p} \right) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cos \left(\frac{2(p-1)\pi}{p} \right) & \cdots \end{pmatrix} Q^{-1}$$

8) Comme p est **impair**, quel que soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\frac{2k\pi}{p} \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$

donc $\cos \left(\frac{2k\pi}{p} \right) \in]-1, 1[$ et ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(\frac{2k\pi}{p} \right) \right)^n = 0$$

9) Soit $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M_p^n$ donc

$$\begin{aligned}
 X_n &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cos^n\left(\frac{2\pi}{p}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cos^n\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cos^n\left(\frac{2\pi}{p}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cos^n\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}}_{\text{première colonne de } Q^{-1}} \\
 &= Q \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \cos^n\left(\frac{2\pi}{p}\right) \\ \vdots \\ a_{p-1} \cos^n\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \mathbb{P}(U_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(U_n = p-1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & \ddots & & & z_{p-1} \\ 1 & z_1^2 & \ddots & \ddots & & z_{p-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & z_{p-1}^{p-2} \\ 1 & z_1^{p-1} & \cdots & \cdots & z_{p-1}^{p-1} & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \cos^n\left(\frac{2\pi}{p}\right) \\ \vdots \\ a_{p-1} \cos^n\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

on en déduit que $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n = k) = a_0$

et comme on sait que : $\sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{P}(U_n = k) = 1$ on peut en conclure que

Pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. $\mathbb{P}(U_n = k)$ tend vers $\frac{1}{p}$ quand n tend vers $+\infty$

10) Interprétation : Lorsque n est suffisamment grand toutes les positions sont équiprobables.

III. Étude d'une variable aléatoire

1) a. Un réel x appartient à D si, et seulement si, $\sin(x) \neq 0$
or sur $\mathbb{R}$,

$$\sin(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$$

donc

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi; (k+1)\pi[\quad \text{ou encore} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

b. (Représentation graphique à soigner)

2) (faire une figure, au moins au brouillon)

A_0 a pour coordonnées $(1, 0)$ et A_k a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\right)$

On note y_k l'ordonnée de B_k ,

$\overrightarrow{A_0B_k}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 - 1 \\ y_k - 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A_0A_k}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 1 \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs sont colinéaires donc

$$-2 \sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - y_k \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 1\right) = 0$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{2 \sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)} \\ &= \frac{4 \sin\left(\frac{k\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{p}\right)} \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, l'ordonnée de B_k est : $2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$
--

3) $2 \cotan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $2 \cotan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

La loi de Z_3 est

z	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$P(Z_3 = z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

et $|Z_3|$ est la variable certaine égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

donc

$E(Z_3) = 0$ et $E(Z_3) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
--

4) Le théorème de transfert donne $E(Z_3) = \sum_{k=1}^{p-1} 2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \frac{1}{p-1} = \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$

or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) &= \sum_{k=1}^{p-1} \cotan\left(\frac{(p-k)\pi}{p}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \cotan\left(\pi - \frac{k\pi}{p}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{p-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \quad \cotan(x) = -\cotan(\pi - x) \end{aligned}$$

on en déduit que cette somme est nulle donc

l'espérance de Z_p est égale à 0

5)

$$\begin{aligned}
 E(|Z_p|) &= \sum_{k=1}^{p-1} \left| 2 \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \right| \frac{1}{p-1} && \text{(Théorème de transfert)} \\
 &= \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^q \left| \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \right| + \frac{2}{p-1} \sum_{k=q+1}^{p-1} \left| \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \right| \\
 &= \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^q \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) - \frac{2}{p-1} \sum_{k=q+1}^{p-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) && \text{pour } x \in [\pi/2, \pi[, \cotan(x) \leq 0 \\
 &= \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^q \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) + \frac{2}{p-1} \sum_{k=q+1}^{p-1} \cotan\left(\pi - \frac{k\pi}{p}\right) && \cotan(x) = -\cotan(\pi - x) \\
 &= \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^q \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) + \frac{2}{p-1} \sum_{k=q+1}^{p-1} \cotan\left(\frac{(p-k)\pi}{p}\right) \\
 &= \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^q \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) + \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^q \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) && \text{Changement d'indice}
 \end{aligned}$$

donc

$$E(|Z_p|) = \frac{4p}{p-1} S_p$$

6) La fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est une primitive de $\cotan$ sur $]0, \pi/2[$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin(x)) = -\infty$ donc

$$\text{L'intégrale généralisée } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cotan(t) dt \text{ diverge.}$$

Remarque la notion de fonction intégrable n'est pas au programme de BCPST.

7) La fonction $\cotan$ est décroissante sur $]0, \pi[$ donc

$$\forall t \in \left[\frac{k\pi}{p}; \frac{(k+1)\pi}{p} \right], \quad \cotan(t) \leq \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right)$$

Et en intégrant sur le segment : $\left[\frac{k\pi}{p}; \frac{(k+1)\pi}{p} \right]$ on obtient :

$$\int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \cotan(t) dt \leq \int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) dt.$$

donc

$$\frac{\pi}{p} \cotan\left(\frac{k\pi}{p}\right) \geq \int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \cotan(t) dt.$$

8) En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à q et en utilisant la relation de Chasles on obtient :

$$\pi S_p \geq \int_{\pi/p}^{(q+1)\pi/p} \cotan(t) dt$$

Et comme $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est une primitive de $\cotan$ sur $]0, \pi[$ on obtient bien :

$$S_p \geq \frac{1}{\pi} \left(\ln\left(\sin\left(\frac{(q+1)\pi}{p}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) \right).$$

9) En remarquant que $\ln \left(\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right) \right) = \ln \left(\sin \left(\frac{(p+1)\pi}{2p} \right) \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ on peut affirmer que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right) \right) - \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right) \right) = +\infty$$

On en déduit par comparaison que

$$\boxed{S_p \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } p \text{ tend vers } +\infty}$$

Ayant vu à la question 7) que pour tout $p \geq 3$ que $E(|Z_p|) = \frac{4p}{p-1} S_p$, on en déduit que :

$$\boxed{E(|Z_p|) \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } p \text{ tend vers } +\infty}$$

10) Montrons que : si $u_n \sim v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$

Démonstration : (*je suis rapide et pas très rigoureux*)

On suppose $u_n \sim v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 &= \frac{\ln(u_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} \end{aligned}$$

or $u_n \sim v_n$ donc $\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n) = -\infty$

On en déduit que : $\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ou encore $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ ■

On peut déduire (car $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$) de la proposition que nous venons de démontrer que

$$\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left(\frac{\pi}{p} \right)$$

et comme on sait que $\ln \left(\frac{\pi}{p} \right) = \ln(\pi) - \ln(p)$ on en conclut que :

$$\boxed{\ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(p)}$$

11) on a vu à la question 8) que : $S_p \geq \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\sin \left(\frac{(q+1)\pi}{p} \right) \right) - \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{p} \right) \right) \right)$.

Il faudrait majorer S_p par une suite équivalente à cette suite (il faut utiliser le même argument)

On en déduirait que $S_p \sim \frac{\ln(p)}{\pi}$

Et comme d'après 5), $E(|Z_p|) = \frac{4p}{p-1} S_p$

$$\boxed{E(|Z_p|) = \frac{4 \ln(p)}{\pi}}$$

FIN DE LA CORRECTION