$\boxed{\text{Correction du devoir surveillé 5 du 11 janvier}}$

Partie I

1) Calculons les matrices des endomorphismes dans $\mathscr{B}$

$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{B}}(f\circ g) &= Mat_{\mathscr{B}}(f)Mat_{\mathscr{B}}(g)\\ &= JK\\ &= 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{B}}(g\circ f) &= KJ\\ &= 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

donc $Mat_{\mathscr{B}}(f\circ g) = Mat_{\mathscr{B}}(g\circ f)$ et ainsi *(car $f\longmapsto Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est bijective)*

$$\boxed{f\circ g = g\circ f}$$

2) Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on note $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} u\in \text{Ker(f)}\cap\text{Ker(g)} &\iff JX=0 \quad \text{et} \quad KX=0\\ &\iff \begin{cases} x - z = 0\\ y - t = 0\\ x+y+z+t = 0\end{cases}\\ &\iff \cdots\\ &\iff u\in \text{Vect} < (1,-1,1,-1) > \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ker(f)}\cap\text{Ker(g)} = \text{Vect} < (1,-1,1,-1) >}$$

3) La matrice de (v_1,v_2,v_3,v_4) dans la base $\mathscr{B}$ est $Mat_{\mathscr{B}}(v_1,v_2,v_3,v_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&1\\1&1&-1&0\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&1\\1&1&-1&0\\1&-1&0&-1\end{pmatrix} &= \text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-2&-1&1\\0&0&-2&0\\0&-2&-1&-1\end{pmatrix}\\ &= \text{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&1&0\\0&\boxed{-2}&-1&1\\0&0&\boxed{-2}&0\\0&0&0&\boxed{-2}\end{pmatrix}\\ &= 4\end{aligned}$$

C'est une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ de rang 4 donc elle est inversible et ainsi

$$\boxed{(v_1,v_2,v_3,v_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$$

4) P est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$,

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&1\\1&1&-1&0\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}}$$

5) $J\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix}$ donc $f(v_1)=4v_1$, de même : $f(v_2)=0v_2,\ \ f(v_3)=0v_3$ et $f(v_4)=0v_4$,

et ainsi : $\boxed{Mat_{\mathscr{B}'}(f)=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}}$

de même : $g(v_1)=0v_1,\ \ g(v_2)=0v_2,\ \ g(v_3)=2v_3$ et $g(v_4)=2v_4$

donc $\boxed{Mat_{\mathscr{B}'}(g)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}}$

6) Les formules de changement de bases donnent :

$$\boxed{J=PJ'P^{-1} \quad \text{et} \quad K=PK'P^{-1}}$$

Partie II

7) On remarque que :

$$\boxed{\text{Pour tout } (a,b)\in\mathbb{R}^2, \quad M(a,b)=aJ+bK}$$

8) Soient $M_1=a_1J+b_1K$, $M_2=a_2J+b_2K$ deux matrices de E,

$$\begin{aligned}M_1M_2 &= (a_1J+b_1K)(a_2J+b_2K)\\ &= a_1a_2\,J^2+b_1b_2\,K^2 && \text{car } JK=KJ=0\\ &= 4a_1a_2\,J+2b_1b_2\,K && \text{car } J^2=4J \text{ et } K^2=2K\\ &\in E\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{le produit de deux matrices quelconques de } E \text{ est encore une matrice de } E}$

9) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}M(a,b) &= aJ+bK\\ &= aPJ'P^{-1}+bPK'P^{-1}\\ &= P(aJ'+bK')P^{-1}\end{aligned}$$

En notant $D(a,b)=aJ'+bK'$ on a : $D(a,b)=\begin{pmatrix}4a&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2b&0\\0&0&0&2b\end{pmatrix}$ diagonale et $M(a,b)=PD(a,b)P^{-1}$

$$\boxed{\text{il existe une matrice diagonale semblable à } M(a,b)}$$

10) Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, non nul, on a : $[M(a,b)]^n=M\left(4^{n-1}a^n,2^{n-1}b^n\right)$,

- Pour $n=1$,
  d'une part $[M(a,b)]^1=M(a,b)$ et d'autre part : $M\left(4^{1-1}a^1,2^{1-1}b^1\right)=M(a,b)$

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $[M(a,b)]^n=M\left(4^{n-1}a^n,2^{n-1}b^n\right)$

$$\begin{aligned}[M(a,b)]^{n+1} &= [M(a,b)]^n\times M(a,b)\\ &= M\left(4^{n-1}a^n,2^{n-1}b^n\right)\times M(a,b) && \textit{(avec l'hypothèse de récurrence)}\\ &= \left(4^{n-1}a^nJ+2^{n-1}b^nK\right)(aJ+bK) && \text{(question 6))}\\ &= 4^na^{n+1}J+2^nb^{n+1}K && \text{(même calcul qu'à la question 7))}\\ &= M\left(4^na^{n+1},2^nb^{n+1}\right)\end{aligned}$$

on obtient bien la relation au rang $n+1$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ non nul, on a : } [M(a,b)]^n=M\left(4^{n-1}a^n,2^{n-1}b^n\right)}$$

Partie III

11) Au départ le pion est sur un case blanche et en deux déplacements le pion revient sur une case de la même couleur donc *(récurrence)*

$$\boxed{\text{Le pion se trouve sur une case blanche après un nombre pair de déplacements}}$$

et en un déplacement le pion passe d'une case blanche à une case noire donc

$$\boxed{\text{Le pion se trouve sur une case noire après un nombre impair de déplacements}}$$

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$(N_{1,n}, N_{2,n}, N_{3,n}, N_{4,n})$ est un système complet d'événements donc pour $i \in [\![1,5]\!]$:

$$P(B_{i,n}) = P(N_{1,n})P_{N_{1,n}}(B_{i,n}) + P(N_{2,n})P_{N_{2,n}}(B_{i,n}) + P(N_{3,n})P_{N_{3,n}}(B_{i,n}) + P(N_{4,n})P_{N_{4,n}}(B_{i,n})$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$$

$(B_{1,n-1}, B_{2,n-1}, B_{3,n-1}, B_{4,n-1}, B_{5,n-1})$ est un système complet d'événements donc pour $i \in [\![1,4]\!]$:

$$P(N_{i,n}) = P(B_{1,n-1})P_{B_{1,n-1}}(N_{i,n}) + \cdots + P(B_{5,n-1})P_{B_{5,n-1}}(N_{i,n})$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,n-1} \\ p_{2,n-1} \\ p_{3,n-1} \\ p_{4,n-1} \\ p_{5,n-1} \end{pmatrix}$$

En posant $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = AV_{n-1} \quad \text{et} \quad V_n = BW_n}$$

13)

$$AB = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On remarque que : $\boxed{AB = M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}\right)}$

14) $AB = M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}\right)$ et on a vu dans la partie II que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [M(a,b)]^n = M\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (AB)^n = M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\cdot 3^n}\right)}$$

15) Pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
(BA)^n &= B(AB)^{n-1}A \\
&= BM\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}\right)A \\
&= \frac{1}{4}BJA + \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}BKA \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc pour $n \geqslant 2$,

$$(BA)^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1 & 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1 \\ 1 & 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1 & 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix}$$

et $\quad BA = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ donc la relation précédente est vraie pour $n = 1$,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{pour } n \geqslant 2,\ (BA)^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1 & 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1 \\ 1 & 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1 & 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix}}$$

16) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad W_n = AV_{n-1} \quad$ et $\quad V_n = BW_n$, $\quad$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = BAV_{n-1}$

On a en déduit, avec un raisonnement par récurrence, que : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad V_n = (BA)^n V_0}$

17) On déduit de la relation précédente que :

$$P(B_{1,n}) = \frac{1}{3}P(B_{1,0}) + \frac{1}{3}P(B_{2,0}) + \frac{1}{3}P(B_{3,0}) + \frac{1}{3}P(B_{4,0}) + \frac{1}{3}P(B_{5,0})$$

or $(B_{1,0}, B_{2,0}, B_{3,0}, B_{4,0}, B_{5,0})$ est un système complet d'événements donc

$$\boxed{P(B_{1,n}) = \frac{1}{3} \qquad \textit{(On remarque que cette probabilité ne dépend pas de } n\textit{).}}$$

18) • D'une part (d'après la question 17) : $\quad P(B_{1,n}) \cdot P(B_{1,n+1}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

• d'autre part la formule des probabilité totales avec le système complet $(N_{i,n})$ donne :

$$\begin{aligned} P(B_{1,n} \cap B_{1,n+1}) &= \sum_{i=1}^{4} P(B_{1,n} \cap N_{i,n} \cap B_{1,n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{4} P(B_{1,n})P_{B_{1,n}}(N_{i,n})P_{B_{1,n}\cap N_{i,n}}(B_{1,n+1}) && \text{Formule des probabilités composées} \\ &= \sum_{i=1}^{4} P(B_{1,n})P_{B_{1,n}}(N_{i,n})P_{N_{i,n}}(B_{1,n+1}) && \text{Hypothèse de l'énoncé} \\ &= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \quad = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

donc $\quad P(B_{1,n} \cap B_{1,n+1}) = P(B_{1,n}) \cdot P(B_{1,n+1}) \quad$ et ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n\text{, non nul, les événements } B_{1,n} \text{ et } B_{1,n+1} \text{ sont indépendants}}$$

19) Si on observe que les déplacements pairs, cette expérience est une succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succés : "être en B_1" a pour probabilité $\frac{1}{3}$,

X compte le nombre de succès donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètre } \left(n, \frac{1}{3}\right)}$

S'agissant d'une loi usuelle on en déduit : $\boxed{E(X) = \frac{n}{3} \text{ et } V(X) = \frac{2n}{9}}$

20) Si on observe que les déplacements pairs, cette expérience est une succession d'un nombre indéfini d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succés : "être en B_1" a pour probabilité $\frac{1}{3}$,

Y est le rang du premier succès, donc :

$$\boxed{Y \text{ suit la loi géometrique de paramètre } \frac{1}{3},\ E(Y) = 3 \text{ et } V(Y) = 6}$$