BCPST 2_A

DEVOIR SURVEILLE

MATHÉMATIQUES

Samedi 11 janvier 2025

(2 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Cet énoncé comporte 2 pages.

Partie I

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4)$ avec

$$\mathrm{e}_1 = (1,0,0,0),\ \mathrm{e}_2 = (0,1,0,0),\ \mathrm{e}_3 = (0,0,1,0) \text{ et } \mathrm{e}_4 = (0,0,0,1).$$

Soient f et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base $\mathscr{B}$ sont respectivement :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

2) Déterminer $\mathrm{Ker(f)} \cap \mathrm{Ker(g)}$.

On considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,-1,1,-1),\ v_3 = (1,0,-1,0) \quad \text{et} \quad v_4 = (0,1,0,-1).$$

3) Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. On notera cette base $\mathscr{B}'$.

4) Écrire la matrice de passage, notée P, de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

5) Donner les matrices de f et g dans la base $\mathscr{B}'$, notées respectivement J' et K'

6) En déduire les relations entre J et J', puis entre K et K'. *(on ne demande pas de calculer P^{-1})*

Partie II

On considère le sous-ensemble E de l'ensemble des matrices réelles carrées de taille 4 défini par :

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

7) Exprimer $M(a,b)$ en fonction de J et K.

8) Montrer que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

9) Montrer qu'il existe une matrice diagonale semblable à $M(a,b)$.

10) Montrer que pour tout entier naturel n, non nul, on a : $[M(a,b)]^n = M\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)$.

Partie III

On considère le damier suivant :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une des cases qui possède avec cette case un côté commun.

Ainsi, si le pion est en N_2, il peut se déplacer vers B_1, B_3 ou B_5, avec des probabilités égales.

On suppose qu'au départ, le pion est sur une case blanche.

11) Où peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ? Après un nombre impair de déplacements ?

Posons maintenant pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{V_n} = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [\![1,5]\!], p_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k après le $(2n)^{\text{ième}}$ déplacement si $n \neq 0$ et $p_{k,0}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k au départ.

Nous noterons $B_{k,n}$ l'évènement : « le pion est sur la case B_k après le $(2n)^{\text{ième}}$ déplacement ».

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad W_n = \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [\![1,4]\!], q_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case N_k après le $(2n-1)^{\text{ième}}$ déplacement.

Nous noterons $N_{k,n}$ l'évènement : «le pion est sur la case $\mathrm{N_k}$ après le $(2n-1)^{\text{ième}}$ déplacement ».

12) Exprimer, pour tout entier n non nul, $(p_{k,n})_{1\leq k\leq 5}$ en fonction de $(q_{k,n})_{1\leq k\leq 4}$, puis $(q_{k,n})_{1\leq k\leq 4}$ en fonction de $(p_{k,n-1})_{1\leq k\leq 5}$.

En déduire deux matrices A et B telles que : $A \in \mathscr{M}_{4,5}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{M}_{5,4}(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = AV_{n-1}$ et $V_n = BW_n$.

13) Calculer AB et montrer que AB est un élément de E.

14) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (AB)^n = M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\cdot 3^n}\right)$.

15) Exprimer de façon simple, pour tout entier naturel n, non nul, $(BA)^n$ en fonction de A, de B et d'une puissance de AB. Calculer $(BA)^n$.

16) Déterminer, pour tout entier naturel n, non nul, une relation entre V_n et V_0.

17) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_1 après le $(2n)^{\text{ième}}$ déplacement ? Que remarque-t-on ?

Nous admettrons que le résultat du $n^{\text{ième}}$ déplacement ne dépend que de la position du pion juste avant ce déplacement et non pas des autres positions précédentes.

On a donc, en particulier : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![1,4]\!], \quad P\left(B_{1,n+1} \mid N_{k,n+1} \cap B_{1,n}\right) = P\left(B_{1,n+1} \mid N_{k,n+1}\right)$.

18) Montrer que, pour tout entier n, non nul, les événements $B_{1,n}$ et $B_{1,n+1}$ sont indépendants.

Nous admettrons, plus généralement, sous l'hypothèse formulée ci-dessus, que la famille d'évènements $(B_{1,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants et nous considèrerons, dans les questions qui suivent, que la position de départ n'est pas obtenue à partir d'un déplacement du pion.

19) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $2n$ déplacements du pion. Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois où le pion a été déplacé sur la case B_1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

20) On effectue des déplacements du pion jusqu'à ce qu'il soit mené en B_1. Soit la variable aléatoire Y, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ égale au nombre de déplacements nécessaires pour que le pion atteigne la case B_1 pour la première fois. Déterminer la loi de Y, puis déterminer son espérance et sa variance.