

MATHÉMATIQUES

Samedi 11 janvier 2025

(50 minutes)

La calculatrice n'est pas autorisée.*Cet énoncé comporte 1 page.*1) On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\text{Si } t \leq 0, f(t) = e^{6t}, \quad \text{si } 0 < t \leq 1, f(t) = t^2 \quad \text{et} \quad \text{si } t > 1, f(t) = \frac{1}{t^3}$$

a) Justifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

b) Calculer cette intégrale.

2) Calculer, si elle existe, l'intégrale $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{t}} dt$.3) Déterminer l'ensemble des primitives sur $]0, 1[$ de la fonction $f : t \mapsto \frac{2}{t^2 - 1}$ 4) On définit f sur $]0, 1[$ par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$.a) Déterminer les limites de f en 0^+ et en 1^- .b) Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$?5) Donner une fonction `tri(L)` permettant de trier une liste L de nombres dans l'ordre croissant.6) Pour tout réel x on note I_x l'intervalle $[0, 1] \cap [x-1, x]$.

$$\text{On a par exemple : } I_1 = [0, 1], \quad I_0 = \{1\} \quad \text{et} \quad I_{\frac{1}{2}} = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad I_{-\frac{1}{2}} = \emptyset$$

a) Illustrer sur un axe les 4 exemples précédents. (*on fera un axe pour chaque exemple*).b) Donner, sans justification, l'ensemble des réels x , $I_x = \emptyset$?c) Simplifier I_x pour $x \in [0, 1]$, puis I_x pour $x \in [1, 2]$.d) En déduire la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \mathbb{1}_{[x-1,x]}(t) dt$