Correction du DS 5 (Bis) du samedi 11 janvier

1) a) a fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1.

(Après étude f est continue en 1, mais cela n'est pas utile pour la suite)

- Pour $x<0$, $\displaystyle\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^0 e^{6t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{e^{6t}}{6}\right]_x^0 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{6}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{6}$.
- $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge *(Intégrale d'une fonction continue sur un segment)*
- pour $x>0$, $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

En conclusion :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente donc on peut appliquer la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans la question précédente on a déjà montré : $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$

de plus $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$ donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1}$$

2) La fonction $t\longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$

Pour $x\in]0,1]$,

$$\begin{aligned}\int_x^1 \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt &= \left[4\sqrt{t}\right]_x^1\\ &= 4-4\sqrt{x}\\ &\underset{x\to0}{\longrightarrow} 4\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt=4}$$

3) On remarque que : pour tout $t\in]0,1[$, $\dfrac{2}{t^2-1}=\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}$,

donc la fonction $t\longmapsto \ln|t-1|-\ln|t+1|$ est une primitive de f sur $]0,1[$

Conclusion 1 :

Les primitives de f sur $]0,1[$ sont *(exactement)* les fonctions $t\longmapsto \ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)+k$ où k est un constante réelle *(arbitraire)*

Conclusion 2 :

$$\boxed{\text{L'ensemble des primitives de } f \text{ sur }]0,1[\text{ est } \left\{t\longmapsto \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)+k \;\middle|\; k\in\mathbb{R}\right\}}$$

4) **a)** En 0^+, $\lim\limits_{t\to 0}\ln(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0}(t-1) = -1$ donc $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} f(t) = +\infty}$ *(limite d'un quotient)*

En 1^-, on sait que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1} = 1$ *(taux d'accroissement)* donc $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1}$

b) f est continue sur $]0,1[$

En 0 : $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$, $\forall t \in]0,1]$, $-\ln(t) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge

donc *(théorème de convergence)* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge

En 1 : $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} 1$, $\forall t \in [0,1]$, $1 \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}t$ converge

donc *(théorème de convergence)* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge

Remarque : *ici, on aurait pu justifier la convergence en arguant que f est prolongeable par continuité en 1.*

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

5) (Voir la feuille_info_10)

6) **a)** *(A faire proprement et rapidement)*

b) $\boxed{I_x = \varnothing \text{ si, et seulement si, } x \notin [0,2]}$

c) si $x \in [0,1]$, $I_x = [0,x]$ et si $x \in [1,2]$, $I_x = [x-1,1]$

d) On remarque que $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{I_x}(t)\,\mathrm{d}t$ donc si $x \in [0,1]$, $f(x) = x$ et si $x \in [1,2]$, $f(x) = 2-x$ et sinon $f(x) = 0$

La représentation graphique de la fonction f est alors :