Colles de mathématiques - Semaine 14 - du 20/01/25

La colle commencera par une question de cours, puis un exercice relativement simple.
Le premier exercice pourra être un calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Les démonstrations de cours classiques pourront être données en exercices.

On ne donnera une question d'informatique qu'à la fin de la colle s'il reste du temps.

- **Révisions : Limites d'une fonction.**
  Limites des fonctions usuelles.
  Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
  Equivalence des polynômes.
  Limite d'une composée.
  Limite obtenue avec un taux d'accroissement. Equivalent usuel.
  Si $\boldsymbol{\lim_{x\to\alpha} h(x) = 0}$ **alors**

$$\sin(h(x)) \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad e^{h(x)}-1 \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad \ln(1+h(x)) \underset{\alpha}{\sim} h(x) \qquad (1+h(x))^b - 1 \underset{\alpha}{\sim} bh(x)$$

  Croissance comparées. (*On se restreint à* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln(x)$)
  Fonctions équivalentes. Règles de calcul sur les équivalents.

- **Révisions : Intégrales d'une fonction continue sur un segment.**
  Somme de Riemann, linéarité, relation de Chasles, croissance de l'intégrale, primitives,
  Etude de fonctions définies à l'aide d'une intégrale.
  Etude de suites définies à l'aide d'une intégrale.
  Théorème fondamental de l'Analyse.
  Parité, périodicité et intégration.
  Intégration par parties.
  Changement de variable de classe C^1.
  Cas particulier du changement de variable affine.

- **Intégrales généralisées.**
  Convergence d'une intégrale impropre pour une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.
  Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
  Cas d'une fonction continue sur un intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.
  Propriétés. Linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, stricte positivité.
  Cas des fonctions paires et des fonctions impaires.
  Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives ou nulles f et g telles que $f \leqslant g$.
  Théorème de convergence pour deux fonctions positives ou nulles f et g telles que $f \sim g$.
  Convergence absolue d'une intégrale généralisée. Théorème. (ACV $\Longrightarrow$ CV)
  Intégrales généralisées usuelles : ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $a < b$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,\mathrm{d}t = b-a \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\,e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi}$$

  Adaptation de la formule d'intégration par parties aux intégrales généralisées
  Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
  Cas particulier du changement de variable affine.

- **Informatique :**

  Algorithme de tri. *(On a vu : sélection, inserttion et comptage.)*

Exemples de questions de cours ou d'application directe du cours :

- Calcul d'une intégrale sur un segment.
- Intégration par parties sur un segment.
- Changement de variable (première année). (*En dehors des changements de variables affines, il sera donné par l'examinateur*)
- Enoncé du théorème fondamental de l'Analyse.
- Etude d'une fonction ou d'une suite définie par une intégrale.
- Donner la définition d'une fonction de classe C^n sur un intervalle I.
- Nature d'une intégrale impropre simple. Calcul en cas de convergence.
- Définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
- Définition et convergence d'une somme de Riemann.
- Définition d'une primitive sur un intervalle.
- Utilisation de la positivité, de la croissance, de la stricte positivité.
- Utilisation du théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs ou nuls pour déterminer la nature d'une intégrale impropre sur un exemple simple.
- Utilisation du théorème de convergence par équivalence des intégrandes positifs ou nuls pour déterminer la nature d'une intégrale impropre sur un exemple simple.
- Calcul d'une intégrale généralisée à l'aide d'une intégration par parties.
  (Quasiment tout le temps on intègre sur un segment et ensuite on passe à la limite)
- Calcul d'une intégrale généralisée à l'aide d'un changement de variable.

- Etude des intégrales de Riemann. *(C'est un exercice)*
- Montrer qu'une intégrale généralisée est absolument convergente.
- Utilisation de l'absolue convergence, pour montrer une convergence.
- Définition des notations $\mathbb{1}_{P(x)}$ et $\mathbb{1}_A(x)$.

  Utilisation pour le calcul des deux intégrales suivantes *(en discutant suivant la valeur de x)* :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x-t)\,\mathrm{d}t \qquad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t)\,\mathrm{d}t$$