Table des matières

1 Eléments propres. 2

1.1 Eléments propres d'un endomorphisme. 2

1.1.1 Valeurs propres. Spectre. 2

1.1.2 Vecteurs propres. Sous-espaces propres. 2

1.2 Eléments propres d'une matrice carrée. 3

1.2.1 Valeurs propres. Spectre. 3

1.2.2 Vecteurs propres. Sous-espaces propres. 4

1.2.3 Cas des matrices triangulaires. 4

1.2.4 Cas des matrices diagonales. 4

1.3 Lien entre matrice et endomorphisme. 5

2 Propriétés des familles de vecteurs propres. 6

2.1 Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. 6

2.2 Juxtaposition des bases des sous-espaces propres. 6

2.3 En dimension finie. 6

2.3.1 Des valeurs propres distinctes. 6

2.3.2 Bases de vecteurs propres. 7

3 Diagonalisation. 8

3.1 Définition. 8

3.1.1 Pour un endomorphisme. 8

3.1.2 Pour une matrice carrée. 8

3.2 Condition suffisante. 9

3.3 Condition nécessaire et suffisante. 9

3.4 En pratique pour les matrices carrées. 9

3.5 Application au calcul de puissance de matrices carées. 10

4 Matrice symétrique réelle. 11

1

Eléments propres.

1.1 Eléments propres d'un endomorphisme.

1.1.1 Valeurs propres. Spectre.

Définition (*Valeur propre d'un endomorphisme*)

Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$

Dire que λ est une **valeur propre** de f signifie que :

il existe un vecteur u **non nul** de E tel que $f(u) = \lambda u$.

En pratique : *(caractérisations)*

Montrer qu' "un scalaire λ est une valeur propre de f" revient à savoir s'

"il existe un vecteur u non nul vérifiant $f(u) = \lambda u$"

c'est équivalent à "pour un certain vecteur u non nul on a : $f(u) - \lambda u = 0_E$"

c'est équivalent à "il existe un vecteur u non nul vérifiant $(f - \lambda Id_E)(u) = 0_E$"

c'est équivalent à "il existe un vecteur u non nul appartenant à $\ker(f - \lambda Id_E)$"

c'est équivalent à " $\boxed{\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}}$ "

c'est équivalent à "l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif ".

Si de plus E est de dimension finie ($\dim(E) = n$) :

c'est équivalent à "l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif ".

c'est équivalent à " $\boxed{\mathrm{rg}(f - \lambda Id_E) < n}$ ".

Remarques autour de la valeur propre 0 **:**

- 0 est une valeur propre de f si, et seulement si, $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.
- 0 est une valeur propre de f si, et seulement si, $\ker(f) \neq \{0_E\}$

Définition (*Spectre.*)

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E,

On appelle **spectre** de f l'ensemble des valeurs propres de f. (on note : $\mathrm{S}p(f)$).

1.1.2 Vecteurs propres. Sous-espaces propres.

Définition (*Vecteur propre d'un endomorphisme*)

Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $u \in E$

Dire que u est une **vecteur propre** de f signifie que :

❶ u est non nul et ❷ il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Définition (*Vecteur propre et valeur propre associés*)

Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E, $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Dire que u est une **vecteur propre de** f **associé** à la valeur propre λ signifie que :

❶ u est non nul et que ❷ $f(u) = \lambda u$.

Définition (*Sous-espace propre associé à une valeur propre.*)

Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$

Lorsque λ est une valeur propre de f

l'ensemble des vecteurs u vérifiant $f(u) = \lambda u$ est appelé **sous-espace propre** de f associé à λ.

On le note : $E_\lambda(f)$

$$E_\lambda(f) = \left\{ \ u \in E \ | \ \ f(u) = \lambda u \ \right\}$$

Remarques :

- $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E)$ En effet : $f(u) = \lambda u \iff$ .....
- 0_E appartient à $E_\lambda(f)$
- $E_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f complété par 0_E.
- $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet : .....

En pratique :

Proposition *En dimension finie*

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, ❶ $\dim(E_\lambda(f)) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda I_E)$

❷ $\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1$

Démonstration : *Théorème du rang,*

1.2 Eléments propres d'une matrice carrée.

Dans ce paragraphe comme dans le cours sur les applications linéaires, on adapte toutes les définitions en confondant la matrice carrée M et l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à X associe MX.

Ici n est un entier naturel non nul.

1.2.1 Valeurs propres. Spectre.

Définition (*Valeur propre d'une matrice carrée*)

Soient M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Dire que λ est une **valeur propre** de M signifie que :

il existe une matrice colonne X **non nulle** de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $MX = \lambda X$.

En pratique : *(caractérisation).*

Montrer qu' "un scalaire λ est une valeur propre de M" revient à savoir s'

"il existe une colonne X non nulle vérifiant $MX = \lambda X$".

c'est équivalent à "le système $(M - \lambda I_n)X = 0$ admet une solution non nulle"

c'est équivalent à " $\boxed{\text{la matrice } (M - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}}$ ".

c'est équivalent à " $\boxed{\mathrm{rg}(M - \lambda I_n) < n}$ ".

c'est équivalent à " $\boxed{\ker(M - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}}$ "

Remarques : *(cas particulier de la valeur propre* 0*)*

- 0 est une valeur propre de M si, et seulement si, $\mathrm{rg}(M) \neq n$.
- 0 est une valeur propre de M si, et seulement si, M n'est pas inversible.

Définition (*Spectre.*)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

On appelle **spectre** de M l'ensemble des valeurs propres de M. (on note : $\mathrm{S}p(M)$).

1.2.2 Vecteurs propres. Sous-espaces propres.

Définition (*Vecteur propre d'une matrice*)

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Dire que X est une **vecteur propre** de M signifie que :

❶ X est non nulle et ❷ il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \lambda X$.

Définition (*Vecteur propre et valeur propre associée*)

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dire que X est une **vecteur propre de** M **associé** à la valeur propre λ signifie que :

❶ X est non nulle et ❷ $MX = \lambda X$.

Définition (*Sous-espace propre associée à une valeur propre.*)

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si λ est une valeur propre de M, alors
l'ensemble des $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $MX = \lambda X$ est appelé **sous-espace propre** de M associé à λ.

On le note : $E_\lambda(M)$

$$E_\lambda(M) = \left\{ \ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \ MX = \lambda X \ \right\}$$

Remarques :

- $\boxed{E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n)}$
- C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ complété par la colonne nulle.
- C'est un sous-espace vectoriel de matrices colonnes.

(*Démonstration : c'est le noyau d'un endomorphisme de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)

Proposition. *(Dimension d'un sous-espace propre).*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

pour tout $\lambda \in \mathrm{S}p(M)$, ❶ $\dim(E_\lambda(M)) = n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$

❷ $\dim(E_\lambda(M)) \geqslant 1$

Démonstration : *Théorème du rang.*

1.2.3 Cas des matrices triangulaires.

Théorème.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

si M est triangulaire (*supérieure ou inférieure*)

alors les valeurs propres de M sont les coefficients diagonaux de M.

Démonstration.

Autrement dit : un scalaire λ est une valeur propre de M si, et seulement si, $\lambda \in \left\{ \ m_{i,i} \mid i \in [\![1;n]\!] \ \right\}$

1.2.4 Cas des matrices diagonales.

Proposition.

Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $\Delta = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

❶ $\mathrm{S}p(\Delta) = \{\alpha_i \mid i \in [\![1, n]\!] \ \}$

❷ pour tout $\lambda \in \mathrm{S}p(\Delta)$, $\dim(E_\lambda(\Delta) = \mathrm{card}(\{i \in [\![1;n]\!] \mid \alpha_i = \lambda \ \})$

Démonstration.

Autrement dit ❷ :
la dimension de l'espace propre de Δ associé à λ est égale au nombre d'apparitions de λ sur la diagonale.

Attention : La proposition ❷ est fausse pour une matrice triangulaire. **Exemple :**

1.3 Lien entre matrice et endomorphisme.

Ici E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème (*Valeur propre.*)

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathscr{B}$ une base quelconque de E,
λ est une valeur propre de f si, et seulement si, λ est une valeur propre de $Mat_{\mathscr{B}}(f)$.

En effet :

Corollaire (*Spectre.*)

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big)$.

En effet :

Corollaires :

❶ Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $\mathrm{Sp}\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big) = \mathrm{Sp}\big(Mat_{\mathscr{B}'}(f)\big)$.

❷ Pour A et B deux matrices carrées, si A et B sont semblables alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$

En effet :

Théorème (*Vecteurs propres .*)

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathscr{B}$ une base de E.
u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ
si, et seulement si, $\mathrm{C}oord_{\mathscr{B}}(u)$ est un vecteur propre de $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ associé à la valeur propre λ

En effet :

Propositions (*Sous-espaces propres.*)

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $u_1, ..., u_m$ des vecteurs de E, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\mathscr{B}$ une base de E,
on note $M = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ et pour tout $i \in [\![1; m]\!]$, $X_i = \mathrm{C}oord_{\mathscr{B}}(u_i)$,
❶ $(X_1, \dots, X_m)$ est une base de $E_\lambda(M)$ si, et seulement si, $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de $E_\lambda(f)$
❷ $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_\lambda(f))$

En effet :

Corollaires :

① Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $\dim\big(E_\lambda\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big)\big) = \dim\big(E_\lambda\big(Mat_{\mathscr{B}'}(f)\big)\big)$.
② Pour A et B deux matrices carrées,
Si A et B sont semblables alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(B))$

En effet :

2

Propriétés des familles de vecteurs propres.

Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et m un entier naturel non nul.

2.1 Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Théorème.

Soient $u_1, ..., u_m$ des vecteurs de E et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des scalaires.
Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes et
si $u_1, ..., u_m$ sont des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, ..., \lambda_m$,
alors $(u_1, ..., u_m)$ est une famille libre.

Démonstration : *(Voir feuille_8_ter)*

2.2 Juxtaposition des bases des sous-espaces propres.

Théorème.

Soient $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ des familles de vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires.
Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes et
si $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ sont respectivement des bases des sous espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_m}(f)$,
alors $\underbrace{(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m)}_{\text{juxtaposition des bases}}$ est une famille libre.

Démonstration : *(Voir feuille_8_ter)*

2.3 En dimension finie.

2.3.1 Des valeurs propres distinctes.

Théorèmes.

- Soient n un entier naturel non nul, E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E.
  Si E est de dimension n alors f a au plus n valeurs propres distinctes.
- Soient n un entier naturel non nul, les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont au plus n valeurs propres distinctes.

En effet :

Remarque : Si on a trouvé n valeurs propres distinctes, il est alors inutile de chercher, on les a toutes.

Exemples : *(Sans calcul trouver le spectre des matrices suivantes)*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et m un entier naturel non nul, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des scalaires.

Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de f alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dim(E_{\lambda_k}(f)) \leqslant \dim(E)$

En effet :

Remarque : Si on a trouvé m valeurs propres λ_1, ..., λ_m distinctes et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = \dim(E)$, il est alors inutile de chercher, on les a toutes.

Théorème.

Soit $M\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et m un entier naturel non nul, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des scalaires.

Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de M alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dim(E_{\lambda_k}(M)) \leqslant \dim(E)$

En effet :

Remarque : Si on a trouvé m valeurs propres λ_1, ..., λ_m distinctes et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = \dim(E)$, il est alors inutile de chercher, on les a toutes.

Exemples : *(Sans calcul trouver le spectre des matrices suivantes)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappel utile ici : on peut calculer $\dim(E_\lambda(M))$ avec la relation : $\dim(E_\lambda(M)) = n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$

3

Diagonalisation.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

3.1 Définition.

3.1.1 Pour un endomorphisme.

Définition

Soit f un endomorphisme de E, dire que f est diagonalisable signifie qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

Autrement dit :

f est diagonalisable si, et seulement si, E possède une base constituée de vecteurs propres de f.

Vocabulaire. $\boxed{\text{"Diagonaliser } f\text{"}}$ signifie trouver une base de E pour laquelle $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

Remarque : Certains endomorphismes ne sont pas diagonalisables. **Exemple :**

Exemples. *(Voir Feuille Exo_16)*

3.1.2 Pour une matrice carrée.

Définition.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, , dire que M est diagonalisable signifie que M est semblable à une matrice diagonale.

Remarque : Certaines matrices ne sont pas diagonalisables.

Vocabulaire. " $\boxed{\text{Diagonaliser } M\text{"}}$ signifie trouver deux matrices : $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$, telles que $M = P\Delta P^{-1}$

Exemples. *(Voir Feuille Exo_16)*

Théorème.

Soient f un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base de E f est diagonalisable si, et seulement si, $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonalisable.

Remarques :

- Les matrices diagonales sont diagonalisables.
  (En particulier la matrice nulle et la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables).
- Pour A et B sont semblables alors (A est diagonalisable si, et seulement si, B est diagonalisable).
- Vu en exercice : Si $M = P\Delta P^{-1}$ alors la trace[1] de M est égale à celle de Δ

  Autrement dit : Si M est diagonalisable alors $\mathrm{tr}(M) = \sum_{\lambda sp(M)} \lambda \dim(E_\lambda(M))$

1. On rappelle que la notion de trace n'est pas au programme.

3.2 Condition suffisante.

Théorème. *(Condition suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable).*

> Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et que E est de dimension n,
> Si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.
> et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Démonstration

Théorème. *(Condition suffisante pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable)*

> Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, Si M possède n valeurs propres distinctes alors M est diagonalisable.
> et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Démonstration

Attention :

Si M (ou f) n'a pas n valeurs propres distinctes alors on ne peut rien conclure avec ce théorème.

3.3 Condition nécessaire et suffisante.

Théorème. *(Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable).*

> Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (et que E est de dimension n),
> f est diagonalisable si, et seulement si,
> la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n.

Démonstration.

Autrement dit : *(Encore une occasion de comprendre la notion d'équivalence)*

- Si $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n$ alors $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$
- Sinon $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Théorème. *(Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable).*

> Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
> M est diagonalisable si, et seulement si,
> la somme des dimensions des sous-espaces propres de M est égale à n.

Démonstration.

Autrement dit :

- Si $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim(E_\lambda(M)) = n$ alors $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$
- Sinon $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Exemple :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.4 En pratique pour les matrices carrées.

$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a montré que M est diagonalisable avec l'un des théorèmes précédents et on a trouvé une base de chaque sous-espace propre et en les juxtaposant on a une base de vecteurs propres,

autrement dit on a :

$$(U_1, U_2, \dots, U_n) \text{ une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \text{tels que :}$$

$$MU_1 = \lambda_1 U_1, \quad MU_2 = \lambda_2 U_2, \quad \cdots \quad , \quad MU_n = \lambda_n U_n \qquad (*)$$

On note P la matrice de $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\Delta = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

d'une part $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ est une base donc P est inversible

et d'autre part on a :

$$M = P\Delta P^{-1}$$

❶ **Première explication.**

Les relations $(*)$ peuvent s'écrire :

$$M\Big(U_1 \,\big|\, U_2 \,\big|\, \cdots \,\big|\, U_n\Big) = \Big(\lambda_1 U_1 \,\big|\, \lambda_2 U_2 \,\big|\, \cdots \,\big|\, \lambda_n U_n\Big)$$

ou encore

$$MP = P\Delta$$

et comme P est inversible, on obtient

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1}}$$

❷ **Deuxième explication.**

On note $f : X \longmapsto MX$, $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{B}$ la base $(U_1, U_2, \dots, U_n)$

P est la matrice de changement de base de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$, $M = Mat_{\mathscr{C}}(f)$ et $\Delta = Mat_{\mathscr{B}}(f)$,

la formule de changement de variable donne : $\Delta = P^{-1}MP$ ou encore :

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1}}$$

En résumé :

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est la matrice d'une base de vecteurs propres de } M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ alors } M = P\Delta P^{-1}}$$

3.5 Application au calcul de puissance de matrices carrées.

Lorsque M est diagonalisable il est simple de calculer les puissances de M

$$\text{Si } \; M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{alors} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad M^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

4

Matrice symétrique réelle.

Théorème. *(Provisoire)*

Soit M une matrice carrée,
Si M est à coefficients réels et M est symétrique alors M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème admis.

Plus précisément pour une matrice carrée M,

Si $\begin{cases} M^\top = M \\ \forall (i,j) \in \mathbb{R}^2, m_{i,j} \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors il existe deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$, telles que $M = P\Delta P^{-1}$.

En particulier :

❶ $\Delta \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc les valeurs propres de M sont réels.

❷ $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc M possède une base de vecteurs propres réels.

Exemples.

Les matrices suivantes sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (*en particulier leur spectre est inclus dans* $\mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad M = \big(i+j\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Attention

❶ ne pas oublier "à coefficients réels", voir l'exemple ci-dessous :

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable.

❷ Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut-être diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car elle n'a pas de valeur propre réelle, en revanche elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ car elle a deux valeurs propres i et $-i$.

plus précisément : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

❸ Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice symétrique à coefficients réels possède des vecteurs propres à coefficients complexes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$$

Nous prolongerons bientôt ce théorème par :

Si $\begin{cases} M^\top = M \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{i,j} \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors il existe deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$, telles que $\begin{cases} M = P\Delta P^{-1} \\ P^{-1} = P^\top \end{cases}$

Autrement dit :

Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.