Table des matières

1 Introduction

Dans ce paragraphe on travaille dans E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lors d'une mesure d'absorbance, on met en évidence des fréquences caractéristiques propre à une molécule. Ici nous allons mettre en évidence des *valeurs propres* à des endomophismes. *(Etude spectrale)*

Sachant qu'une matrice carrée peut être vue comme un endomorphisme, toutes les définitions sur les endomorphismes seront encore valables pour les matrices.

On étudie souvent des phénomènes modélisés par des relations $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $X_{n+1} = MX_n$.

On s'intéresse ici au "direction fixe" : autrement dit les vecteurs u vérifiant $u \neq 0_E$ et $f(u)$ et u sont colinéaires.

Ces directions privilégiées sont dirigées par les vecteurs appelés *vecteurs propres* de f.

Exemples :
- Avec $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$ avec $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$
- Avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Remarque : dans certains cas il existe des endomorphismes sans vecteurs propres.

Exemples :
- Dans $\mathbb{R}$ les matrices de rotations.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, $P \mapsto XP$.

Si u est un vecteur propre de f alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$, ce nombre est appelé *valeur propre* de f.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé : *spectre de f*.

Nous verrons des définitions précises de ces notions pour f et pour M.

Nous verrons des **théorèmes** montrant des propriétés sur ces éléments :
- Nombres de valeurs propres.
- Liberté des vecteurs propres.

En dimension finie : Etudier les endomorphismes revient à étudier les matrices associées une fois une base choisie.

On se placera ensuite dans le cas où f possède une base de vecteurs propres : f est alors dit **diagonalisable**.

Dans ce cas il sera simple d'étudier f^n donc des modèles de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On pourra aussi résoudre des systèmes différentielles linéaires en changeant de base.

2

Eléments propres.

2.1 Eléments propres d'un endomorphisme.

2.1.1 Valeurs propres. Spectre.

Définition (*Valeur propre d'un endomorphisme*)

> Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$
> Dire que λ est une **valeur propre** de f signifie que :
> il existe un vecteur u **non nul** de E tel que $f(u) = \lambda u$.

En pratique : *(caractérisations)*
Montrer qu' "un scalaire λ est une valeur propre de f" revient à savoir s'
"il existe un vecteur u non nul vérifiant $f(u) = \lambda u$"
c'est équivalent à "pour un certain vecteur u non nul on a : $f(u) - \lambda u = 0_E$"
c'est équivalent à "il existe un vecteur u non nul vérifiant $(f - \lambda Id_E)(u) = 0_E$"
c'est équivalent à "il existe un vecteur u non nul appartenant à $\ker(f - \lambda Id_E)$"
c'est équivalent à " $\boxed{\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}}$ "
c'est équivalent à "l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif ".
Si de plus E est de dimension finie ($\dim(E) = n$) :
c'est équivalent à "l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif ".
c'est équivalent à " $\boxed{\mathrm{rg}(f - \lambda Id_E) < n}$ ".

Remarques autour de la valeur propre 0 :
- 0 est une valeur propre de f si, et seulement si, $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.
- 0 est une valeur propre de f si, et seulement si, $\ker(f) \neq \{0_E\}$

Définition (*Spectre.*)

> Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E,
> On appelle **spectre** de f l'ensemble des valeurs propres de f. (on note : $\mathrm{S}p(f)$).

2.1.2 Vecteurs propres. Sous-espaces propres.

Définition (*Vecteur propre d'un endomorphisme*)

> Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $u \in E$
> Dire que u est une **vecteur propre** de f signifie que :
> ❶ u est non nul et ❷ il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Définition (*Vecteur propre et valeur propre associés*)

> Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E, $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
> Dire que u est une **vecteur propre de f associé** à la valeur propre λ signifie que :
> ❶ u est non nul et que ❷ $f(u) = \lambda u$.

Définition (*Sous-espace propre associé à une valeur propre.*)

Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$
Lorsque λ est une valeur propre de f
l'ensemble des vecteurs u vérifiant $f(u) = \lambda u$ est appelé **sous-espace propre** de f associé à λ.
On le note : $E_\lambda(f)$

$$E_\lambda(f) = \left\{ \ u \in E \mid \ f(u) = \lambda u \ \right\}$$

Remarques :

- $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E)$ En effet : $f(u) = \lambda u \iff$ ....
- 0_E appartient à $E_\lambda(f)$
- $E_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f complété par 0_E.
- $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet : ....

Théorème *En dimension finie*

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, ❶ $\dim(E_\lambda(f)) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda Id_E)$
❷ $\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1$

En effet : *Théorème du rang appliqué à $f - \lambda Id_E$,*

2.2 Eléments propres d'une matrice carrée.

Dans ce paragraphe comme dans le cours sur les applications linéaires, on adapte toutes les définitions en confondant la matrice carrée M et l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à X associe MX.

Ici n est un entier naturel non nul.

2.2.1 Valeurs propres. Spectre.

Définition (*Valeur propre d'une matrice carrée*)

Soient M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
Dire que λ est une **valeur propre** de M signifie que :
il existe une matrice colonne X **non nulle** de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $MX = \lambda X$.

En pratique : *(caractérisation).*
Montrer qu' "un scalaire λ est une valeur propre de M" revient à savoir s'
"il existe une colonne X non nulle vérifiant $MX = \lambda X$".
c'est équivalent à "le système $(M - \lambda I_n)X = 0$ admet une solution non nulle"
c'est équivalent à " $\boxed{\text{la matrice } (M - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}}$ ".
c'est équivalent à " $\boxed{\mathrm{rg}(M - \lambda I_n) < n}$ ".
c'est équivalent à " $\boxed{\ker(M - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}}$ "

Remarques : *(cas particulier de la valeur propre 0)*

- 0 est une valeur propre de M si, et seulement si, $\mathrm{rg}(M) \neq n$.
- 0 est une valeur propre de M si, et seulement si, M n'est pas inversible.

Définition (*Spectre.*)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
On appelle **spectre** de M l'ensemble des valeurs propres de M. (on note : $\mathrm{S}p(M)$).

2.2.2 Vecteurs propres. Sous-espaces propres.

Définition (*Vecteur propre d'une matrice*)

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Dire que X est une **vecteur propre** de M signifie que :

❶ X est non nulle et ❷ il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \lambda X$.

Définition (*Vecteur propre et valeur propre associée*)

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dire que X est une **vecteur propre de** M **associé** à la valeur propre λ signifie que :

❶ X est non nulle et ❷ $MX = \lambda X$.

Définition (*Sous-espace propre associée à une valeur propre.*)

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si λ est une valeur propre de M, alors

l'ensemble des $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $MX = \lambda X$ est appelé **sous-espace propre** de M associé à λ.

On le note : $E_\lambda(M)$

$$E_\lambda(M) = \left\{ \ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \ MX = \lambda X \ \right\}$$

Remarques :

- $\boxed{E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n)}$
- C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ complété par la colonne nulle.
- C'est un sous-espace vectoriel de matrices colonnes.

(*Démonstration : c'est le noyau d'un endomorphisme de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)

Proposition. *(Dimension d'un sous-espace propre).*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

pour tout $\lambda \in \mathrm{S}p(M)$, ❶ $\dim(E_\lambda(M)) = n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$

❷ $\dim(E_\lambda(M)) \geqslant 1$

Démonstration : *Théorème du rang appliqué à la matrice* $M - \lambda I_n$.

2.2.3 Cas des matrices triangulaires.

Théorème.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

si M est triangulaire (*supérieure ou inférieure*)

alors les valeurs propres de M sont les coefficients diagonaux de M.

Démonstration.

Autrement dit : un scalaire λ est une valeur propre de M si, et seulement si, $\lambda \in \left\{ \ m_{i,i} \mid i \in [\![1;n]\!] \ \right\}$

2.2.4 Cas des matrices diagonales.

Proposition.

Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $\Delta = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

❶ $\mathrm{S}p(\Delta) = \{\alpha_i \mid i \in [\![1,n]\!] \ \}$

❷ pour tout $\lambda \in \mathrm{S}p(\Delta)$, $\dim(E_\lambda(\Delta) = \mathrm{card}(\{i \in [\![1;n]\!] \mid \alpha_i = \lambda \ \})$

Démonstration.

Autrement dit ❷ :

la dimension de l'espace propre de Δ associé à λ est égale au nombre d'apparitions de λ sur la diagonale.

Attention : La proposition ❷ est fausse pour une matrice triangulaire. **Exemple :**

2.2.5 Résultats classiques.

(A savoir redémontrer)

Transposée.

Somme des lignes (resp. des colonnes) constantes.

Polynôme annulateur.

Voir la feuille_cours_7

2.3 Lien entre matrice et endomorphisme.

Ici E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème (*Valeur propre.*)

> Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathscr{B}$ une base quelconque de E,
> λ est une valeur propre de f si, et seulement si, λ est une valeur propre de $Mat_{\mathscr{B}}(f)$.

En effet :

Corollaire (*Spectre.*)

> Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big)$.

En effet :

Corollaires :

> ❶ Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $\mathrm{Sp}\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big) = \mathrm{Sp}\big(Mat_{\mathscr{B}'}(f)\big)$.
>
> ❷ Pour A et B deux matrices carrées, si A et B sont semblables alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$

En effet :

Théorème (*Vecteurs propres .*)

> Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathscr{B}$ une base de E.
> u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ
> si, et seulement si, $\mathrm{C}oord_{\mathscr{B}}(u)$ est un vecteur propre de $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ associé à la valeur propre λ

En effet :

Propositions (*Sous-espaces propres.*)

> Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $u_1, ..., u_m$ des vecteurs de E, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\mathscr{B}$ une base de E,
> on note $M = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ et pour tout $i \in [\![1; m]\!]$, $X_i = \mathrm{C}oord_{\mathscr{B}}(u_i)$,
> ❶ $(X_1, \dots, X_m)$ est une base de $E_\lambda(M)$ si, et seulement si, $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de $E_\lambda(f)$
> ❷ $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_\lambda(f))$

En effet :

Corollaires :

> ① Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $\dim\big(E_\lambda\big(Mat_{\mathscr{B}}(f)\big)\big) = \dim\big(E_\lambda\big(Mat_{\mathscr{B}'}(f)\big)\big)$.
> ② Pour A et B deux matrices carrées,
> Si A et B sont semblables alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda(B))$

En effet :

3

Propriétés des familles de vecteurs propres.

Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et m un entier naturel non nul.
et soient n un entier non nul et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

3.1 Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Théorème.

Soient $u_1, ..., u_m$ des vecteurs de E et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des scalaires.
Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de f et
si $u_1, ..., u_m$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement à $\lambda_1, ..., \lambda_m$,
alors $(u_1, ..., u_m)$ est une famille libre.

Démonstration : *(Voir feuille_7_3 Ex 1.)*

Corollaire.

Soient $X_1, ..., X_m$ des matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des scalaires.
Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de la matrice M et
si $X_1, ..., X_m$ sont des vecteurs propres de M associés respectivement à $\lambda_1, ..., \lambda_m$,
alors $(X_1, ..., X_m)$ est une famille libre.

3.2 Juxtaposition des bases des sous-espaces propres.

Théorème.

Soient $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ des familles de vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires.
Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de f et
si $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ sont respectivement des bases des sous espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_m}(f)$,
alors $\underbrace{(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m)}_{\text{juxtaposition des bases}}$ est une famille libre.

Démonstration : *(Voir feuille_7_3 Ex 3)*

Corollaire.

Soient $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ des familles de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires.
Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de M et
si $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m$ sont respectivement des bases des sous espaces propres $E_{\lambda_1}(M), \dots, E_{\lambda_m}(M)$,
alors $\underbrace{(\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_m)}_{\text{juxtaposition des bases}}$ est une famille libre.

3.3 En dimension finie.

3.3.1 Nombre de valeurs propres distinctes.

Théorème.

Soient n un entier naturel non nul, E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E.
Si E est de dimension n alors f a au plus n valeurs propres distinctes.

En effet :

Remarque : Si on a trouvé n valeurs propres distinctes, il est alors inutile de chercher, on les a toutes.

Corollaire.

- Soient n un entier naturel non nul, E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E.
  Si E est de dimension n alors f a au plus n valeurs propres distinctes.
- Soient n un entier naturel non nul, les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont au plus n valeurs propres distinctes.

Exemples : *(Sans calcul trouver le spectre des matrices suivantes)*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Somme des dimensions des sous-espaces propres.

Théorème.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et m un entier naturel non nul, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des scalaires.

Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de f alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dim(E_{\lambda_k}(f)) \leqslant \dim(E)$

En effet :

Remarque : Si on a trouvé m valeurs propres λ_1, ..., λ_m distinctes et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = \dim(E)$ *, il est alors inutile de chercher, on les a toutes.*

Corollaire.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et m un entier naturel non nul, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des scalaires.

Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont m valeurs propres distinctes de M alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dim(E_{\lambda_k}(M)) \leqslant n$

En effet :

Remarque : Si on a trouvé m valeurs propres λ_1, ..., λ_m distinctes et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = \dim(E)$ *, il est alors inutile de chercher, on les a toutes.*

Exemples : *(Sans calcul trouver le spectre des matrices suivantes)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappel utile ici : on peut calculer $\dim(E_\lambda(M))$ avec la relation : $\dim(E_\lambda(M)) = n - \text{rg}(M - \lambda I_n)$

4 Diagonalisation.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

4.1 Définition.

4.1.1 Pour un endomorphisme.

Définition

> Soit f un endomorphisme de E,
> dire que f est diagonalisable signifie qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

Autrement dit :

f est diagonalisable si, et seulement si, E possède une base constituée de vecteurs propres de f.

Vocabulaire. $\boxed{\text{"Diagonaliser } f\text{"}}$ signifie trouver une base de E pour laquelle $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

Exemple : $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$ est diagonalisable,

en effet dans la base $((1, 1), (1, -1))$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

Remarque : Certains endomorphismes ne sont pas diagonalisables.

Exemple : $f : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ n'est pas diagonalisable.
En effet :

4.1.2 Pour une matrice carrée.

Définition.

> Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ,
> dire que M est diagonalisable signifie que M est semblable à une matrice diagonale.

Remarque : Certaines matrices ne sont pas diagonalisables.

Vocabulaire. " $\boxed{\text{Diagonaliser } M\text{"}}$ signifie trouver deux matrices : $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$, telles que $M = P\Delta P^{-1}$

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable,

En effet, en prenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ on a bien $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$, telles que $M = P\Delta P^{-1}$

Remarques :

- Les matrices diagonales sont diagonalisables.

  (En particulier la matrice nulle et la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables).

- Pour A et B sont semblables alors (A est diagonalisable si, et seulement si, B est diagonalisable).

- Vu en exercice : Si $M = P\Delta P^{-1}$ alors la trace [1] de M est égale à celle de Δ

  Autrement dit : Si M est diagonalisable alors $\mathrm{tr}(M) = \displaystyle\sum_{\lambda sp(M)} \lambda \dim(E_\lambda(M))$

  A la fin d'un exercice, vérifier que la trace de M est égale à celle de la matrice diagonale obtenue.

Théorème.

Soient f un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base de E f est diagonalisable si, et seulement si, $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonalisable.

Remarque :

Lorsque f est diagonalisable on a : $Mat_{\mathscr{B}}(f) = P\Delta P^{-1}$ avec $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$

alors P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers une base de vecteurs propres.

En effet :

4.2 Condition suffisante.

Théorème. *(Condition suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable).*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (où E un espace vectoriel de dimension n),   Si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.   et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

En effet :

Corollaire. *(Condition suffisante pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable)*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, Si M possède n valeurs propres distinctes alors M est diagonalisable.   et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

En effet :

Attention :

Si M (ou f) n'a pas n valeurs propres distinctes alors $\boxed{\text{on ne peut rien conclure}}$ avec ce théorème.

Exemples :

- $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ M_1 a n valeurs propres distinctes $\boxed{\text{OUI}}$-$\boxed{\text{NON}}$ M_1 est diagonalisable $\boxed{\text{OUI}}$-$\boxed{\text{NON}}$

- $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ M_2 a n valeurs propres distinctes $\boxed{\text{OUI}}$-$\boxed{\text{NON}}$ M_2 est diagonalisable $\boxed{\text{OUI}}$-$\boxed{\text{NON}}$

- $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ M_2 a n valeurs propres distinctes $\boxed{\text{OUI}}$-$\boxed{\text{NON}}$ M_2 est diagonalisable $\boxed{\text{OUI}}$-$\boxed{\text{NON}}$

1. On rappelle que la notion de trace n'est pas au programme.

4.3 Condition nécessaire et suffisante.

Théorème. *(Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable).*

> Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (où E un espace vectoriel de dimension n),
> f est diagonalisable si, et seulement si,
> la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n.

Démonstration. *(admise)*

Autrement dit : *(Encore une occasion de comprendre la notion d'équivalence)*

- Si $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = n$ alors $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$
- Si $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) \neq n$ alors $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Remarque :

si f n'a pas de valeur propre alors $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = 0$ et ainsi f n'est pas diagonalisable.

Exemples :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad\qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array}$$

Corollaire. *(Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable).*

> Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
> M est diagonalisable si, et seulement si,
> la somme des dimensions des sous-espaces propres de M est égale à n.

En effet :

Autrement dit :

- Si $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim\left(E_\lambda(M)\right) = n$ alors $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$
- Si $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim\left(E_\lambda(M)\right) \neq n$ alors $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Exemples :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.4 En pratique pour les matrices carrées.

$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a montré que M est diagonalisable avec l'un des théorèmes précédents et on a trouvé une base de chaque sous-espace propre et en les juxtaposant on a une base de vecteurs propres,

autrement dit on a :

$(U_1, U_2, \dots, U_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$MU_1 = \lambda_1 U_1, \quad MU_2 = \lambda_2 U_2, \quad \cdots \quad , \quad MU_n = \lambda_n U_n \qquad (*)$$

On note P la matrice de $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\Delta = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

d'une part $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ est une base donc P est inversible

et d'autre part on a :

$$M = P\Delta P^{-1}$$

❶ Première explication.

Les relations $(*)$ peuvent s'écrire :

$$M\Big(U_1 \,|\, U_2 \,|\, \cdots \,|\, U_n\Big) = \Big(\lambda_1 U_1 \,|\, \lambda_2 U_2 \,|\, \cdots \,|\, \lambda_n U_n\Big)$$

ou encore

$$MP = P\Delta$$

et comme P est inversible, on obtient

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1}}$$

❷ Deuxième explication.

On note $f : X \longmapsto MX$, $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{B}$ la base $(U_1, U_2, \dots, U_n)$

P est la matrice de changement de base de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$, $M = Mat_{\mathscr{C}}(f)$ et $\Delta = Mat_{\mathscr{B}}(f)$,

la formule de changement de variable donne : $\Delta = P^{-1}MP$ ou encore :

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1}}$$

Théorème :

Si P est la matrice d'une base de vecteurs propres de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors $M = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec λ_j la valeur propre associée à la colonne C_j de P.

Rédaction *(A adapter à chaque situation)*

Exemple : Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• On a trouvé le spectre en cherchant les λ pour lesquels $\mathrm{rg}(M - \Lambda I_3) < 3$) $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}}$

• On a trouvé des bases des sous-espaces propres en résolvant les systèmes :$(M - \lambda I_3)X = 0$:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_2(M) \qquad \text{et} \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(M).$$

On remarque que la somme des dimensions des sous-espaces propres de M est égale à 3 donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$ en juxtaposant les bases on obtient une base de vecteurs propres de M, plus précisément :

En prenant : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a P inversible et :

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1}}$$

4.5 Application au calcul de puissance de matrices carrées.

Lorsque M est diagonalisable il est simple de calculer les puissances de M

$$\text{Si} \quad M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{alors} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad M^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

4.6 Application aux systèmes différentielles linéaires.

$$X'(t) = MX(t) \iff P^{-1}X'(t) = \Delta P^{-1}X(t)$$

5

Matrice symétrique réelle.

Théorème. *(Provisoire)*

Soit M une matrice carrée,
Si M est à coefficients réels et M est symétrique alors M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème admis.

Plus précisément pour une matrice carrée M,

Si $\left\{\begin{array}{c} M^\top = M \\ \forall (i,j) \in \mathbb{R}^2, m_{i,j} \in \mathbb{R} \end{array}\right.$ alors il existe deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\left\{\begin{array}{l} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{array}\right.$, telles que $M = P\Delta P^{-1}$.

En particulier :

❶ $\Delta \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc les valeurs propres de M sont réels.

❷ $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc M possède une base de vecteurs propres réels.

Exemples.

Les matrices suivantes sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (*en particulier leur spectre est inclus dans* $\mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad M = \big(i+j\big)_{\substack{1\leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Attention

❶ ne pas oublier "à coefficients réels", voir l'exemple ci-dessous :

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable.

❷ Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut-être diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car elle n'a pas de valeur propre réelle, en revanche elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ car elle a deux valeurs propres i et $-i$.

plus précisément : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

❸ Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice symétrique à coefficients réels possède des vecteurs propres à coefficients complexes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$$

Nous prolongerons bientôt ce théorème par :

Si $\left\{\begin{array}{l} M^\top = M \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{i,j} \in \mathbb{R} \end{array}\right.$ alors il existe deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\left\{\begin{array}{l} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{array}\right.$, telles que $\left\{\begin{array}{l} M = P\Delta P^{-1} \\ P^{-1} = P^\top \end{array}\right.$

Autrement dit :

Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.