

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants.

On suppose dans toutes les questions d'informatique que les modules `math` et `random` ont été importés via les instructions `from math import *` et `import random as rd`

EXERCICE 1.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I .

- 1) a) Déterminer $(A - I)^2$.
b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A .
- 2) On pose $A = N + I$.
a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N , puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .
b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
- 3) a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A .
b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.
- 4) On pose $u_1 = (f - \text{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
a) Montrer que le rang de $f - \text{id}$ est égal à 1.
b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\ker(f - \text{id})$.
- 5) a) Montrer que (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.
- 6) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1} .
- 7) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne qui vaut 1.
a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$.
Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :
$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP).$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$.

EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

- 1) Déterminer u_1 et u_2 .
- 2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 3) On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .
a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$.
b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$ puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.
c) Montrer que, pour tout réel t , on a : $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.
d) En déduire que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ puis donner la limite de la suite (u_n) .
e) Calculer $\int_0^1 (1-t)^n dt$ puis montrer que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

- 4) a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

Puis une relation de u_{n+1} en fonction de u_n .

- b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

- c) On admet l'équivalent $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

- 5) *Informatique.*

- a) Ecrire une fonction récursive en Python prenant un entier n comme argument et qui renvoie la valeur de u_n en utilisant le résultat de la question 4) a)
- b) Ecrire une fonction Python non récursive prenant un entier n comme argument et qui renvoie la valeur de u_n en utilisant les résultats de la question 4) a)
- c) Ecrire une fonction Python prenant un entier n comme argument et qui renvoie la valeur de u_n en utilisant le résultat de la question 4) c)
- d) Comparer les deux fonctions précédentes.

EXERCICE 3.

Notations et rappels.

On utilise les notations habituelles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, mais aussi $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*$. Par exemple $\mathbb{Z}^*$ désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls, et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Pour $m \leq n$ entiers naturels, on note $\llbracket m, n \rrbracket = \{m, \dots, n\}$ l'ensemble des entiers naturels compris dans l'intervalle $[m, n]$.

Pour $n \geq 1$, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M carrées de taille n à coefficients réels. On identifie un vecteur de taille n avec la matrice de taille $n \times 1$. On dit qu'une suite $(M^{(k)})_{k \geq 1}$ de matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ si pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, la suite des coefficients $(M_{i,j}^{(k)})_{k \geq 1}$ converge vers le coefficient $M_{i,j}$. On rappelle par ailleurs qu'un vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de M si il existe un réel λ tel que $MX = \lambda X$. Ce réel est alors appelé valeur propre associée au vecteur propre X .

Dans cette partie, on se fixe n un entier supérieur ou égal à 2, et a, b et c des réels strictement positifs.

On s'intéresse à la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } j = i \\ b & \text{si } j = i - 1 \\ c & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j \notin \{i - 1, i, i + 1\} \end{cases}$$

1) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$. On a alors $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de M .

2) Pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $X^{(l,r)} = (X_i^{(l,r)})_{1 \leq i \leq n}$ le vecteur défini par

$$X_i^{(l,r)} = r^i \sin\left(\frac{il\pi}{1+n}\right)$$

et $Y^{(l,r)} = (Y_i^{(l,r)})_{1 \leq i \leq n}$ le vecteur défini par

$$Y_i^{(l,r)} = r^i \cos\left(\frac{il\pi}{1+n}\right)$$

Pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que l'on a :

$$MX^{(l,r)} = \left(a + \left(cr + \frac{b}{r}\right) \cos\left(\frac{l\pi}{1+n}\right)\right) X^{(l,r)} + \left(cr - \frac{b}{r}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{1+n}\right) Y^{(l,r)}.$$

En déduire que pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur $X^{(l, \sqrt{b/c})}$ est un vecteur propre, et déterminer la valeur propre associée. On notera $X^{(l)} = X^{(l, \sqrt{b/c})}$ ce vecteur propre, et $\lambda^{(l)}$ la valeur propre associée.

3) Soient $m \geq 1$ et $Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}$ des vecteurs propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ supposées distinctes et ordonnées par ordre décroissant : $\lambda_1 > \dots > \lambda_m$.

a) Sous l'hypothèse supplémentaire $\lambda_m > 0$, montrer que la famille $(Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$ est libre. On pourra considérer, pour Z combinaison linéaire de ces vecteurs, le comportement de $A^k Z$ lorsque k tend vers l'infini.

b) Montrer que le résultat reste vrai sans l'hypothèse $\lambda_m > 0$.

c) En déduire que les vecteurs $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

4) Pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $E^{(l)} = (E_i^{(l)})_{1 \leq i \leq n}$ le vecteur défini par

$$E_i^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que $E^{(1)}, \dots, E^{(n)}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $(\alpha_{i,l})_{1 \leq i \leq n}$ les coefficients de $E^{(l)}$ dans la base $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$. Montrer que la suite de matrices $\left(\frac{1}{(\lambda^{(1)})^k} M^k\right)_{k \geq 1}$ converge vers la matrice

$N = (N_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par

$$N_{i,j} = \alpha_{1,j} \left(\frac{b}{c}\right)^{i/2} \sin\left(\frac{i\pi}{1+n}\right)$$

5) Montrer que les coefficients $N_{i,j}$ sont tous strictement positifs.