1

Densités de probabilité et fonction de répartition.

1.1 Densités de probabilité.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Dire que f est une densité de probabilité signifie que :

❶ f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$,
❷ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
❸ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Remarques :

- si f est une densité de probabilité alors quels que soient a et b vérifiant $-\infty \leqslant a, b \leqslant +\infty$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- si f est une densité de probabilité alors on peut définir sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Définition

On considère X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega\,,\ \mathscr{T}, \mathbb{P})$.
Dire que X est une variable aléatoire réelle à densité signifie qu'il existe une densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques.

❶ Une telle fonction n'est pas unique et est appelée densité de X.
❷ En notant F_X la fonction de répartition de X, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

❸ Dire que deux variables aléatoires suivent la même loi signifie qu'elles ont la même fonction de répartition.
❹ *Dans ce contexte*,
Donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est justifier que X admet une densité et en donner une.

Proposition.

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives.
Si f est une densité de X et si g coincide avec f sauf un nombre fini de points alors g est une densité de X.

En pratique : Quand on choisit une densité on peut choisir arbitrairement l'image d'un nombre fini de points.

Théorème

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est une densité de probabilité alors
il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire sur cet espace dont f est une densité.

1.2 Propriétés de la fonction de répartition.

Propriétés des fonctions de répartition des variables aléatoires à densité.

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité alors :

❶ F est continue sur $\mathbb{R}$.

❷ F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

❸ F est croissante sur $\mathbb{R}$.

❹ $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Démonstration : *Faite au tableau*
On note $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels vérifiant : $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$, $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$ et $D = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ et on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus D = \left]-\infty, a_1\right[\cup \left]a_1, a_2\right[\cup \cdots \cup \left]a_{n-1}, a_n\right[\cup \left]a_n, +\infty\right[$
Il suffit de démontrer que : ❶ F est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$ et que ❷ F est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$.

(le reste des propriétés a été vu dans un chapitre précédent).

$\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in \left]a_i, a_{i+1}\right[$, $F(x) = F(a_i) + \displaystyle\int_{a_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui permet d'une part de montrer que :

❶ F est de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$, car f est C^0 sur $]a_i, a_{i+1}[$ donc $x \longmapsto \displaystyle\int_{a_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et dérivable et $F' = f$

et ❷ $\lim\limits_{x\to a_{i+1}^-} F(x) = F(a_{i+1})$, en effet f est C^0 sur $]a_i, a_{i+1}[$ et $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente

On a bien montré que F est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$ et que F est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$. ■

Proposition : Les variables aléatoires discrètes ne sont pas des variables aléatoires à densité

Proposition : Si X est de densité f et que f est continue sur $\mathbb{R}$ alors F_X est C^1 sur $\mathbb{R}$ est $F' = f$

1.3 Caractérisation des variables à densité.

Théorème.

Soit X une variable aléatoire, on note $F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array}$

X est à densité **si, et seulement si,** ❶ F_X est continue sur $\mathbb{R}$ (*en entier*) et
❷ F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Démonstration : *Faite au tableau* *On reprend les notation de la démonstration précédente.*
Il suffit de démontrer que : si F est continue sur $\mathbb{R}$ et F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$ alors X est à densité.
On définit f sur $\mathbb{R}$ par : si $x \in \mathbb{R} \setminus D$ alors $F'(x) = f(x)$ et sinon $f(x) = 0$

❶ $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ car F est croissante sur $\mathbb{R}$.

❷ F est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

❸ Pour $i \in [\![0; n]\!]$,
F est une primitive de f sur $]a_i, a_{i+1}[$, F admet une limite réelle en a_i et a_{i+1}
donc $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et comme c'est vrai pour tout i, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \left(\lim_{a_{i+1}^-} F - \lim_{a_i^+} F \right) = \lim_{a_{n+1}} F - \lim_{a_0} F}_{\text{telescopage en utilisant } F \text{ continue sur } \mathbb{R}} = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 1$

En conclusion de ❶ , ❷ et ❸ f est une densité de probabilité.

La relation de Chasles donne pour $x \in]a_j, a_{j+1}[$,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{j-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{j-1} \left(\lim_{a_{i+1}^-} F - \lim_{a_i^+} F \right) + F(x) - \lim_{a_j^+} F = F(x)$$

et comme F est continue sur $\mathbb{R}$, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ■

En pratique.
Lorsqu'une variable aléatoire est définie par sa fonction de répartition F_X :

Si ❶ F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et ❷ de classe C^1 sauf en un nombre fini de points.
alors on peut affirmer que X est une variable à densité.

Si ❶ F discontinue en *(au moins)* un $x_0 \in \mathbb{R}$ ou si ❷ F n'est pas de classe C^1 en un nombre infini de points
alors on peut affirmer que X n'est pas une variable à densité.

Remarques :

- Dans ce théorème on fait l'hypothèse que F est une fonction de répartition donc on sait déjà que :

$$F \text{ est croissante, que } \lim_{-\infty} F = 0 \text{ et que } \lim_{+\infty} F = 1$$

- Les variables discrètes ne sont pas à densité, mais il en existe d'autres, des variables ni discrètes, ni à densité.

En pratique : *(Le plus souvent).*
① On détermine F_X la fonction de répartition de X.
② On verifie que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ en entier, qu'elle est C^1 sauf en un nombre fini de points.
③ On peut alors affirmer que X est une variable à densité.
④ On détermine alors une densité de X en dérivant F_X sur les intervalles où elle est dérivable.

1.4 Densités $\longleftrightarrow$ fonction de répartition.

Dans les deux propositions suivantes on note :
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels vérifiant : $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$.
un nombre fini de points de $\mathbb{R}$.
on note : $D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

on remarque que $\mathbb{R} \setminus D$ ($\mathbb{R}$ *privé d'un nombre fini de points.*) peut s'écrire :

$$\mathbb{R} \setminus D = \left]-\infty, a_1\right[\cup \left]a_1, a_2\right[\cup \cdots \cup \left]a_{n-1}, a_n\right[\cup \left]a_n, +\infty\right[$$

(C'est une réunion d'intervalles)

1.4.1 De la fonction de répartition à une densité.

Théorème

Soient F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à densité.
si F est la fonction de répartition de X et si F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$
alors la fonction f définie par $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus D, & f(x) = F'(x) \\ \forall x \in D, & f(x) = 0 \end{cases}$ est une densité de X.

Remarques :

- On définit ici une des densités de X.
- Lorsque F est constante sur un intervalle alors f est nulle sur cet intervalle.
- Bien vérifier *(au brouillon)* à la fin de vos calculs que la fonction obtenue est bien une densité de probabilité.
  La fonction f doit être positive, continue sauf sur D et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1.

En pratique :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left]-\infty, a_1\right[, & f(x) = F'(x) \\ \forall\, x \in \left]a_1, a_2\right[, & f(x) = F'(x) \\ \quad\vdots & \\ \forall\, x \in \left]a_n, +\infty\right[, & f(x) = F'(x) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(a_i) = 0 \qquad (\textit{ choix arbitraire dans } \mathbb{R}^+)$$

Exemples : Feuille_Calculs_10

1.4.2 D'une densité à la fonction de répartition.

Option 1. *On utilise la définition :* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$

En notant f_0 la restriction de f sur $]-\infty, a_1[$, ..., f_i sur $]a_i, a_{i+1}[$, ..., f_n sur $]a_n, +\infty[$ on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, a_1], \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\,\mathrm{d}t \\ \forall x \in]a_1, a_2], \quad F(x) = F(a_1) + \int_{a_1}^{x} f_1(t)\,\mathrm{d}t \\ \quad \vdots \\ \forall x \in [a_n, +\infty[, \quad F(x) = F(a_n) + \int_{a_n}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Remarque : On retrouve ci-dessus une présentation qui permet de retrouver les propriétés de régularité de F :

F de classe C^1 partout sauf (éventuellement) sur D, F est continue sur $\mathbb{R}$.

Option 2. *On utilise la proposition suivante.*

> Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à densité.
> si f est une densité de X et si f est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ alors
> la fonction de répartition de X est une primitive de f sur tous les intervalles :
> $]-\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[$, $\cdots$, $]a_{n-1}, a_n[$ et $]a_n, +\infty[$

Sur chaque intervalle on choisit la primitive de f qui vérifie :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \ , \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \quad \lim_{x\to a_i^-} F(x) = \lim_{x\to a_i^+} F(x) = F(a_i) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Remarques :

- Lorsque f est nulle sur $]a_i, a_{i+1}[$ alors F est constante sur $[a_i, a_{i+1}]$
  (encore vraie sur $]-\infty, a_1[$ et $]a_n, +\infty[$)

- Bien vérifier *(au brouillon)* à la fin de vos calculs que la fonction obtenue est bien une fonction de répartition.

  Elle doit être croissante, continue sur tout $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Exemples : Feuille_Calculs_9

1.4.3 En résumé.

- On passe de la fonction de répartition à une densité en dérivant sur chaque intervalle.

- On passe d'une densité à la fonction de répartition en déterminant une primitive sur chaque intervalle.
  (La primitive qui permet à F d'être continue)

Attention.

- Dans le cours des fonctions dérivables sur un intervalle :
  - Quand on dérive une fonction F sur I, sa dérivée f est unique.
  - Quand on cherche une primitive de f sur I, il y a une infinité de primitives.

- Dans ce cours, c'est le contraire :
  - Pour une densité de probabilité f, il y a une unique fonction de répartition F.
  - Pour une fonction de répartition F, il y a une infinité de densité de probabilité.

2

Calculs de probabilité.

2.1 Des événements négligeables.

Proposition.

Soit X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

On suppose X est une variable à densité, on note f une de ses densités.

❶ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

❷ Pour tout ensemble fini D, $\mathbb{P}(X \in D) = 0$.

❸ Pour tout ensemble dénombrable D, $\mathbb{P}(X \in D) = 0$.

Démonstration. *Feuille Cours_9_bis*

2.2 Avec la fonction de répartition.

Proposition :

On considère X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

On suppose X est une variable à densité, on note F sa fonction de répartition.

❶ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ on a : $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F(b) - F(a)$.

on peut remplacer $[a, b]$ *par* $]a, b]$, $[a, b[$ *ou* $]a, b[$.

❷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que on a : $\mathbb{P}(X \in]-\infty; a]) = F(a)$.

on peut remplacer $]-\infty; a]$ *par* $]-\infty; a[$.

❸ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que on a : $\mathbb{P}(X \in [a; +\infty[) = 1 - F(a)$.

on peut remplacer $[a; +\infty[$ *par* $]a; +\infty[$.

Démonstration. *Feuille Cours_9_bis*

2.3 Avec une densité.

Proposition.

Soit X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

On suppose X est une variable à densité, on note f une de ses densités.

❶ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ on a : $\mathbb{P}\Big(X \in [a, b]\Big) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

❷ Pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ on a : $\mathbb{P}\Big(X \in]a, b[\Big) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. *Feuille Cours_9_bis*

Remarque : Dans ce contexte on pourra utiliser la notation : $\mathbb{P}(X \in I) = \displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

2.4 Valeurs prises par X.

Définition. *(Valeurs de X)*

Soient X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega\,, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$,
dire que X est *(quasiment)* à valeurs dans I signifie que $\mathbb{P}(X \in I) = 1$

Remarques :

- On peut étendre cette définition en remplaçant I par une réunion dénombrable d'intervalles.
- L'événement $(X \in I)$ est quasi-certain.
- Lorsqu'on observe la réalisation de cette expérience, on est quasi-certain que X prend une valeur dans I.
- En pratique on pourra supprimer "*(quasiment)*"

Proposition. *(Valeurs prises et densité)*

Soit X une variable aléatoire à densité,
X est *(quasiment)* à valeurs dans I
si, et seulement s'il existe une densité de X qui est nulle en dehors de I.

Démonstration. *Feuille Cours_9_bis*

Proposition. *(Valeurs prises et fonction de répartition)*

Soit X une variable aléatoire à densité et a, b deux réels,
X est *(quasiment)* à valeurs dans $\big[a, b\big]$
si, et seulement si, $\quad \forall x \leqslant a, \quad F(x) = 0 \quad$ et $\quad \forall x \geqslant b, \quad F(x) = 1$

Démonstration. *Feuille Cours_9_bis*

Remarque : Certains s'autorisent $X(\Omega) = I$, mais cette notation peut amener des questions inutiles.

2.5 Indépendance

Définition. *Indépendance de deux variables aléatoires à densité.*

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$,
X et Y sont indépendantes si, et seulement si :
quel que soit le couple (x, y) de réels, $\quad P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$

Quel que soit le couple (x, y) de réels, $\quad P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)) = F_X(x) \times F_Y(y)$

Quel que soit le couple (x, y) de réels, $\quad P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \times \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$

Définition *Indépendance de n variables aléatoires à densité.*

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une liste de variables aléatoires à densité sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.
Les X_k sont (mutuellement) indépendantes si, et seulement si, :
quel que soit la liste $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de réels , $\quad P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x_k)$

Revoir le cours donnant les propriétés communes à toutes les variables aléatoires . (lemme de coalition ...)

3

Exemples de recherche de la loi de u(X).

Notation de $u(X)$.

Soients X une variable à densité, I un intervalle et u une fonction définie sur I.
Si X est *(quasiment)* à valeurs dans I, alors on peut définir la variable aléatoire $\omega \longmapsto u(X(\omega))$.

on note : $u(X)$ cette variable aléatoire.

Remarque : Dans le cours sur les applications on aurait noté $u \circ X$ cette variable aléatoire.

Exemples.

Proposition.

Soients X une variable à densité, I un intervalle et u une fonction définie sur I.
Si X est à valeurs dans I, alors $u(X)$ est à valeurs dans $u(I)$

En effet.

Remarque : $u(I)$ est l'image directe de I par u, on l'obtient en dressant le tableau de variations de u sur I.

Exemples. *Feuille Cours_9_bis.*

En pratique :
On connait la densité de X et on répond à la question "Donner la loi de $Y = u(X)$."

❶ On détermine les valeurs prises par X. (*On note* I)
❷ On détermine la fonction de répartition F_X de X.
❸ On détermine J l'ensemble des valeurs prises par Y . (*Tableau de variations de* u *sur* I)

En posant $u : x \longmapsto x^2$

x	-1		0		1
u	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

❹ Pour $y \in J$,
on exprime $F_Y(y) = P(Y \leqslant y)$ avec F_X
puis $F_Y(y)$ en fonction de y.

❺ On donne les expressions définissant F_Y sur $\mathbb{R}$ en entier.

❻ On justifie que Y est une variable densité avec sa fonction de répartition.

F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de réels et F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ en entier.

❼ On déduit de F_Y une densité de Y en dérivant sur les intervalles ouverts où elle est dérivable.

4

Espérance. Propriétés.

Définition.

On considère X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega\,,\mathscr{T},\mathbb{P})$.

On suppose X est une variable à densité, on note f une de ses densités.

Dire que X admet une espérance signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est *(absolument)* convergente.

et lorsque cette condition est vérifiée on définit l'espérance de X par : $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques :

- Pour f une densité de probabilité on a l'équivalence : *(mais en pratique je ne m'en sers pas).*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente si, et seulement si, } \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}$$

- Certaines variables à densité n'admettent pas d'espérance.
- Quand $E(X)=0$, on dit que la variable est centrée.

Exemples. *Feuille Cours_9_ter*

Proposition :

Soit X une variable aléatoire ,

❶ $E(1)=1$

❷ Si X est à valeurs positives ou nulles et X admet une espérance alors $E(X)\geqslant 0$.

Théorème : *(linéarité de l'espérance)*

Soient X et Y deux variables aléatoires d'un même espace probabilisé,

Si X et Y admettent chacune une espérance alors

pour tout réel a et b, $aX+bY$ admet une espérance et $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$.

Démonstration :

Remarque : On en déduit que : Si $X\leqslant Y$ alors $E(X)\leqslant E(Y)$

Généralisation

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste de variables aléatoires sur un même espace probabilisé et $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste de réels.

Si les X_k possèdent toutes une espérance alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_kX_k$ admet une espérance et

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} a_kX_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_kE(X_k)$$

4.1 Théorème de transfert.

Soient X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$
et $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$\varphi(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b \varphi(t) f(t) \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

et alors : $E(\varphi(X)) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t) f(t)\, \mathrm{d}t$

Remarques :

- On obtient l'espérance de $\varphi(X)$ avec la densité de X.
- Toujours la même remarque sur la notion d'équivalence :

  Si $\displaystyle\int_a^b \varphi(t) f(t) \mathrm{d}t$ ne converge pas absolument alors $\varphi(X)$ n'admet pas d'espérance.

  Si $\displaystyle\int_a^b \varphi(t) f(t) \mathrm{d}t$ converge absolument alors $\varphi(X)$ admet une d'espérance.
- Ici on a bien besoin de la condition d'absolue convergence. *(voir la remarque précédente sur l'espérance)*

Exemples. *Feuille Cours_9_ter*

4.2 Variance d'une variable aléatoire.

4.2.1 Définition

Définition

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance $E(X)$.
Lorsque la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance on dit que X admet une variance et on définit sa variance par

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Remarques :

- Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance.
- Dire qu'une variable aléatoire est **réduite** signifie que sa variance est égale à 1.
- En notant $m = E(X)$, cela donne pour X une variable aléatoire à densité : *(théorème de transfert)*

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - m)^2 f(t)\, \mathrm{d}t \qquad \textit{(en cas de convergence)}$$

Exemples. *Feuille Cours_9_ter*

4.2.2 Formule de Kœnig-Huygens.

Théorème : *(Formule de Kœnig-Huygens).*

Soit X est une variable aléatoire réelle,

X admet une variance si, et seulement si, X et X^2 admettent une espérance.

et alors : $\quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad$ *(en cas de convergence)*

Démonstration.

Remarque :

En notant $m = E(X)$, cela donne pour X une variable aléatoire à densité : *(théorème de transfert)*

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t - m^2$$

Exemples. *Feuille Cours_9_ter*

4.2.3 Propriétés de la variance.

Proposition :

❶ Quelle que soit la variable aléatoire X admettant une variance, on a : $V(X) \geqslant 0$.
❷ Si X est une variable à densité alors $V(X) \neq 0$.
❸ Pour toute variable aléatoire X, a et b deux réels, on a :
Si X admet une variance alors $aX+b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2V(X)$

Démonstration.

4.2.4 Moments d'ordre supérieurs.

Définition :

Pour X une variable aléatoire et n un entier naturel,
Quand X^n admet une espérance on appelle $E(X^n)$ le moment de X d'ordre n.

4.2.5 Ecart-type.

Définition :

Quand X admet une variance, l'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel : $\sqrt{V(X)}$

On note souvent : $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ou $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$,

d'où la notation $V(X) = \sigma^2$

Définition :

Pour X une variable aléatoire admettant une variance $V(X) \neq 0$,
$X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est appelée **variable aléatoire centré réduite** associée à X.

Démonstration.

4.3 Avec des variables aléatoires indépendantes.

Théorème :

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
❶ Si X et Y sont indépendantes et admettent des espérances alors
XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.
❷ Si X et Y sont indépendantes et admettent des variances alors
$X+Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Généralisation :

Soit $(X_k)_{1<k\leqslant n}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,
❶ Si les X_k sont indépendantes et admettent des espérances alors
$$\prod_{k=1}^{n} X_k \text{ admet une espérance et } E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$
❷ Si les X_k sont indépendantes et admettent des variances alors
$$\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ admet une variance et } V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

5

Lois à densité usuelles.

On considère X une variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega; \mathscr{T}, \mathbb{P})$ quelconque.

5.1 Lois uniformes à densité.

Définition :

Soient a, b deux réels vérifiant $a < b$

Dire que X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ signifie que la fonction $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$ est une densité de X.

On note : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$

Proposition : *Caractérisation avec la fonction de répartition.*

Soient X une variable aléatoire et a, b deux réels $(a < b)$ on note F la fonction de répartition de X,

$X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$ si et seulement si, F est la fonction définie par $\begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$.

Remarque : *on peut reconnaître une loi uniforme avec sa fonction de répartition.*

Représentation graphique.

Proposition. (*Stabilité des lois uniformes par transformation affine $t \longmapsto mt + p$*)

Soient X une variable aléatoire, a, b, m et p quatre réels vérifiant $a < b$ et $m \neq 0$

- lorsque $m > 0$, Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$ alors $mX + p \hookrightarrow \mathscr{U}([ma + p, mb + p])$.
- lorsque $m < 0$, Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$ alors $mX + p \hookrightarrow \mathscr{U}([mb + p, ma + p])$.

Démonstration. *(Faite au tableau)*

A retenir : Si X suit une loi uniforme sur un segment alors $mX + p$ aussi.

Remarques.

- Les réciproques sont vraies.

- $\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & [ma+p, mb+p] \\ x & \longmapsto & mx+p \end{array}$ est une bijection et sa réciproque est $\begin{array}{ccc} [ma+p, mb+p] & \longrightarrow & [a,b] \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-p}{m} \end{array}$

Cela autorise les raisonnements suivants :

① $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$ donc $X - a \hookrightarrow \mathscr{U}([0, b-a])$ donc $\dfrac{X-a}{b-a} \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$

② $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ donc $(b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}([0, b-a])$ donc $a + (b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$

(Simulation des lois uniformes)

En Python, le module `random` peut être importé via `import random as rd`,

`rd.random()` — — — — — — Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

Pour simuler une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$, il suffit d'utiliser l'instruction

```
a + (b-a) * rd.random()
```

Pour simuler une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left[m - \frac{h}{2}, m + \frac{h}{2}\right]\right)$, on utilise :

```
m + h/2*( -1 + 2*rd.random() )
```

Remarque : En physique vous utlisez le module `numpy.random` et la fonction `uniform(a, b, N)`

Proposition.

$X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$ $(a < b)$, alors elle admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Démonstrations. *Feuille Cours_9_ter*

Remarque si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left[m - \frac{h}{2}, m + \frac{h}{2}\right]\right)$, alors

$E(X) =$............ $V(X) =$............ $\sigma(X) =$............

Remarque sur les incertitudes :

5.2 Lois exponentielles.

Définition :

Soit λ un réel strictement positif, $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$

Dire que X suit une loi exponentielle de paramètre λ signifie que :

la fonction $t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}\, \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$ est une densité de X.

On note : $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Proposition :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ si, et seulement si, sa fonction de répartition est $t \longmapsto (1 - e^{-\lambda t})\, \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$.

Remarque : *on peut reconnaître une loi exponentielle avec sa fonction de répartition.*

Représentation graphique.

Proposition.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors elle admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstrations. *Feuille Cours_9_ter*

Proposition.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Démonstration.

(Simulation des lois exponentielles)

En Python, on importe `random` et `math` via `import random as rd` et `from math import *`

Pour simuler une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$, $(a > 0)$ il suffit d'utiliser l'instruction

`-1/a*log(1 - rd.random())` ou `-1/a*log(rd.random())`

Voir la feuille Exo 19 Ex 2 ou la feuille d'info 12

Proposition. *(Absence de mémoire)*

$$\boxed{\text{S'il existe } \lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \quad \text{alors} \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^*,\ P_{X>t_1}(X > t_1 + t_2) = P(X > t_2)}$$

Démonstration.

Remarques :

❶ Attention à l'autre notation des probabilités conditionnelles :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^*,\ P(X > t_1 + t_2 | X > t_1) = P(X > t_2)$$

❷ Les lois exponentielles permettent de modéliser la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, exemples classiques : composant électronique, désintégration d'un atome radioactif.

❸ Si on sait qu'à l'instant t_1 le composant fonctionne toujours,
sa durée de vie suit toujours la même loi qu'au début de sa vie.

En particulier :

Si on sait qu'à l'instant t_1 le composant fonctionne toujours, son espérance de vie est toujours la même.

❹ On pourrait montrer que cette implication est une équivalence.

5.3 Lois normales.

5.3.1 Loi normale centrée réduite.

Définition :

Dire que X suit la loi normale centrée réduite signifie que :

$$\text{la fonction} \quad t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{est une densité de } X.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Remarque : on a admis que $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1$ pour les autres propriétés *Voir feuille Cours_10*

Proposition.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors elle admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = 0 \qquad V(X) = 1 \qquad \sigma(X) = 1$$

Démonstrations *Voir feuille Cours_9_ter*

5.3.2 Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

On note dans ce chapitre Φ la fonction de répartition de la loi centrée réduite.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Remarque : *On ne sait pas exprimer Φ à l'aide des fonctions usuelles.*
Pour les calculs numériques on utilise une table de valeurs ou un outil informatique. *Voir la feuille Cours_10_bis.*

Proposition.

❶ Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

❷ Φ réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

❸ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. En particulier, $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration *Voir feuille Cours_10*

Remarque : La courbe représentative de Φ est symétrique par rapport à $A(0, \frac{1}{2})$.

Proposition.

Pour toute variable aléatoire réelle X, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ si, et seulement si, $-X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Démonstration. *Voir feuille Cours_10*

Définition

On appelle **fonction des quantiles** de la loi centrée réduite, la réciproque de la bijection $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,1[\\ x & \longmapsto & \Phi(x) \end{array}$

On la note $\alpha \longmapsto u_\alpha$

Remarques :

- On peut aussi noter cette fonction comme dans le cours sur les applications Φ^{-1}.
- Pour $\alpha \in]0;1[$, u_α est **le quantile d'ordre $\boldsymbol{\alpha}$ de la loi $\boldsymbol{\mathcal{N}(0,1)}$**.
- Pour $\alpha \in]0;1[$, u_α est l'unique réel x vérifiant $\Phi(x) = \alpha$.

Propositions.

❶ $\alpha \longmapsto u_\alpha$ est une bijection continue et strictement croissante de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
❷ Pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\quad \Phi(u_\alpha) = \alpha$
❸ Pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\quad u_\alpha = -u_{1-\alpha}$
❹ Pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1-\alpha$

Démonstrations. *Voir feuille Cours_10.*

Proposition.

Soit X une variable aléatoire,

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ alors $\Phi^{-1}(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Démonstration. *Voir feuille Cours_10*

(Simulation de la loi normale centrée normale)

Option 1. *(Dans le formulaire donné à l'oral de l'agro-véto.)* En Python, le module `random` peut être importé via `import random as rd`,
`rd.gauss(0, 1)` – – – – – –– Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Option 2. *(En utilisant la proposition précédente .)*
En Python, on peut importer Φ^{-1} via `from scipy.stats import norm`

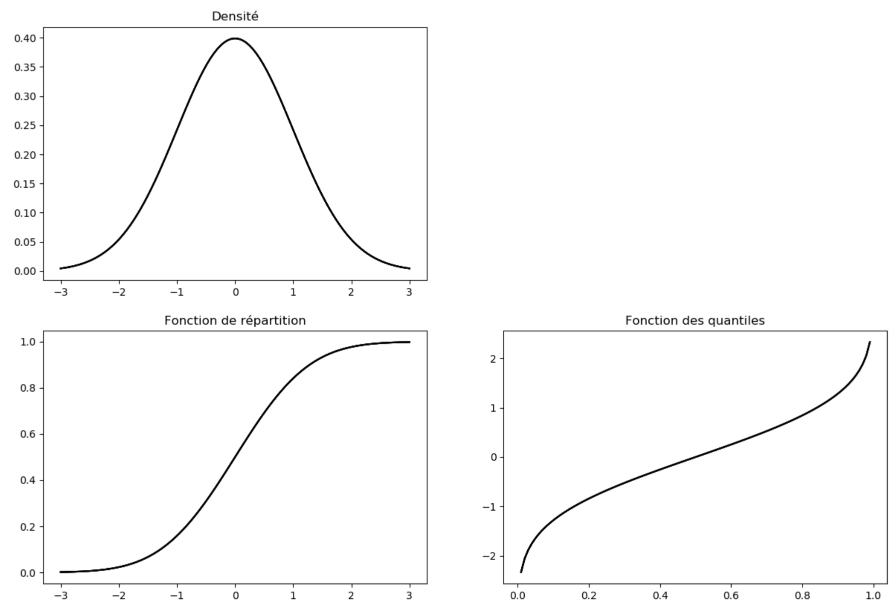
`norm.ppf    # percent point function`

`norm.ppf(rd.random())` – – – – – –– Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Remarque : En physique vous utlisez le module `numpy.random` et la fonction `normal(0, 1, N)`

Le programme suivant illustre l'utilisation du module `scipy.stats`.

```
from scipy.stats import norm   # norm :  normal continuous random variable

f = norm.pdf    # probability density function
F = norm.cdf    # cumulative distribution function
u = norm.ppf    # percent point function

N= 100
a = -3
b =  3

x = [a+k*(b-a)/N for k in range(N+1)]
plt.subplot(221)
y = [ f(t) for t in x ]
plt.plot(x, y, 'k')
plt.title('Densité')

plt.subplot(223)
y = [ F(t) for t in x ]
plt.plot(x, y, 'k')
plt.title('Fonction de répartition')

x = [ 0 + k *1/N for k in range(1,N)]
plt.subplot(224)
y = [ u(t) for t in x ]
plt.plot(x, y, 'k')
plt.title('Fonction des quantiles')

plt.show()
```



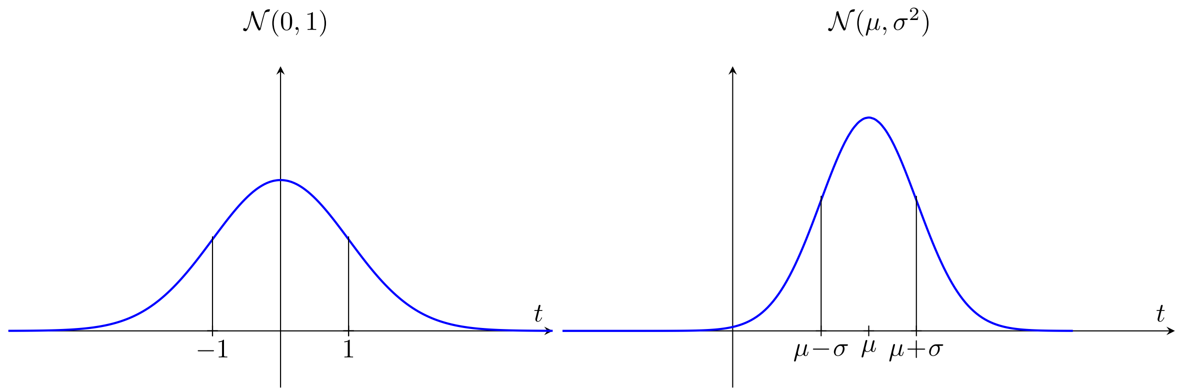
5.4 Lois normales quelconques.

Définition.

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.
Dire que X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ signifie que

X est une variable aléatoire à densité et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ est une densité de X.

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *(la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2).*



Courbe de Gauss

Remarques :

- les points d'inflexion sur la courbe de la densité de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sont aux points de coordonnées $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ est bien une densité de probabilité.

  En effet le théorème de changement de variable ($x = \frac{t-\mu}{\sigma}$) donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sigma \, \mathrm{d}x$$

(de même nature et égales en cas de convergence)

- On dit aussi que X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ou encore que X est une gaussienne.

- Certains auteurs notent : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ *(la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ).*

Théorème.

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.

en notant : $X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ *(la variable centrée réduite associée à X)* on a :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Démonstration. *Voir feuille Cours_10_ter*

Proposition.

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque. si $\quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad$ alors $\quad E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2 \qquad \sigma(X) = \sigma$

Démonstration. *Voir feuille Cours_10_ter (On confirme ici ce qui est dit dans la définition)*

Théorème. (*Stabilité de l'ensemble des lois normales par transformation affine*).

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a \neq 0)$ $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si, et seulement si, $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Démonstration : *Voir feuille Cours_10_ter*

Remarques :

- Ce qu'il faut retenir :

  Si $\quad X$ suit une loi normale $\quad$ alors $\quad aX + b$ suit une loi normale ;

  pour les paramètres il suffit d'utiliser : $\quad E(aX + b) = aE(X) + b \quad$ et $\quad V(aX + b) = a^2V(X)$

- Si $\quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad$ alors $\quad \mu + \sigma X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

(Simulation de la loi normale)

Option 1.

En Python, le module `random` peut être importé via `import random as rd`

`m + sqrt(v)*rd.gauss(0, 1)` −−−−−− Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, v)$.

Option 2.

En Python, on peut importer Φ^{-1} via `from scipy.stats import norm`

```
norm.ppf    # percent point function
```

`m+sqrt(v)*norm.ppf(rd.random())` −−−− Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, v)$.

Remarque : En physique vous utlisez le module `numpy.random` et la fonction `normal(a, b, N)`

Attention : a est l'espérance et b est l'écart-type.

6

Somme de variables aléatoires à densité indépendantes.

6.1 Produit de convolution.

Définition.

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

On appelle produit de convolution de f et de g la fonction :

$$h : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème.

Soient X et Y deux variables aléatoires de densité respective f et g,

Si X et Y sont indépendantes alors :

- $X+Y$ est une variable à densité.
- $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ est une densité de $X+Y$.

Remarques :

- *Les sujets devront vous rappeler ce théorème.*
- $f+g = g+f$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

- Pour deux variables discrètes indépendantes X et Y, en notant $Z = X+Y$:

$$\text{Pour tout } z \in Z(\Omega), \quad P(Z=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)P(Y=z-x)$$

formule des probabilités totales et indépendance

Exemples : (*Voir la feuille Cours_10_quater*)

Revoir la somme de deux lois exponentielles de même paramètre ou de deux uniformes sur $[0,1]$.

Attention à l'usage des fonctions indicatrices dans ce contexte. (voir cours sur les intégrales généralisées usuelles)

6.2 Somme de variables aléatoires normales indépendantes.

Théorème. *(Stabilité de l'ensemble des lois normales)*

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, σ_1, σ_2 deux réels strictement positifs et μ_1, μ_2 deux réels quelconques.

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes

alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2\,,\, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Démonstration : *(Ex 6 de la feuille Cours_10_quater)*

Généralisation.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des variables aléatoires, $(\sigma_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des réels strictement positifs et $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ des réels quelconques.

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_k\,,\, \sigma_k^2)$ et si les X_k sont *(mutuellement)* indépendantes

alors
$$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k\;,\; \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$$

Démonstration. *(Récurrence + lemme de coalition)*

Corollaire.

Toutes combinaisons linéaires de gaussiennes mutuellement indépendantes est une gaussienne.

En pratique : *Il suffit de connaître ce corollaire.*

Avec pour $k \in [\![1, n]\!]$ $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_k\,,\, \sigma_k^2\right)$ et $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$

❶ Les X_k sont des gaussiennes mutuellement indépendantes donc Y suit une loi normale.

❷ Par linéarité de l'espérance on obtient $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$, on note μ ce réel.

❸ Les variables X_k sont mutuellement indépendantes donc $V(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(a_k X_k)$

et comme $V(aX+b) = a^2 V(X)$ il vient : $V(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 V(X_k)$, on note σ^2 ce réel.

On peut alors conclure : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)}$

Remarques : *motivées par l'intervention de Laura en 2023.*

- Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes admettant des variances :

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

- Plus généralement pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes admettant des variances :

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$$

- Encore plus généralement pour une suite de variables mutuellement indépendantes :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 V(X_k)$$