

Table des matières

1 Densités de probabilité et fonction de répartition.	2
1.1 Densités de probabilité.	2
1.2 Propriétés de la fonction de répartition.	3
1.3 Caractérisation des variables à densité.	3
1.4 Loi de X	3
1.5 Deux premiers exemples usuels.	4
2 Méthodes pratiques.	5
2.1 De la fonction de répartition à une densité.	5
2.2 D'une densité à la fonction de répartition.	6
2.2.1 En résumé.	6
3 Calculs de probabilité.	7
3.1 Des événements négligeables.	7
3.2 Avec la fonction de répartition.	7
3.3 Avec une densité.	7
3.4 Valeurs prises par X	8
3.5 Indépendance	8
4 Exemples de recherche de la loi de $u(X)$.	9
5 Espérance. Propriétés.	10
5.1 Théorème de transfert.	10
5.2 Variance d'une variable aléatoire.	11
5.2.1 Définition	11
5.2.2 Formule de Kœnig-Huygens.	11
6 Lois à densité usuelles.	12
6.1 Lois uniformes à densité.	12
6.2 Lois exponentielles.	14
6.3 Lois normales.	16
6.3.1 Loi normale centrée réduite.	16
6.3.2 Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite	16
6.3.3 Lois normales quelconques.	18
7 Somme de variables aléatoires à densité indépendantes.	20
7.1 Produit de convolution.	20
7.2 Somme de variables aléatoires normales indépendantes.	21

Densités de probabilité et fonction de répartition.

1.1 Densités de probabilité.

Définition

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Dire que f est une densité de probabilité signifie que :

- ❶ f est positive ou nulle sur \mathbb{R} ,
- ❷ f est continue sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points
- ❸ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

Remarques :

- si f est une densité de probabilité alors quels que soient a et b vérifiant $-\infty \leq a, b \leq +\infty$, $\int_a^b f(t) dt$ converge.
- si f est une densité de probabilité alors on peut définir sur \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Définition

On considère X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dire que X est une variable aléatoire réelle à densité signifie qu'il existe une densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Remarques.

- ❶ Une telle fonction n'est pas unique et est appelée densité de X .
- ❷ En notant F_X la fonction de répartition de X , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

- ❸ Dire que deux variables aléatoires suivent la même loi signifie qu'elles ont la même fonction de répartition.

Proposition.

Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} à valeurs positives.

Si f est une densité de X et si g coïncide avec f sauf un nombre fini de points alors g est une densité de X .

En effet :

En pratique : Quand on choisit une densité on peut choisir arbitrairement l'image d'un nombre fini de points.

Théorème.

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Si f est une densité de probabilité alors

il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire sur cet espace dont f est une densité.

Démonstration (Admis)

1.2 Propriétés de la fonction de répartition.

Propriétés des fonctions de répartition des variables aléatoires à densité.

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité alors :

- ❶ F est continue sur \mathbb{R} .
- ❷ F est de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- ❸ F est croissante sur \mathbb{R} .
- ❹ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- ❺ En tout x où f est continue, F est dérivable, $F'(x) = f(x)$

Démonstration :

Proposition :

Les variables aléatoires discrètes ne sont pas des variables aléatoires à densité

En effet :

Proposition :

Si X est de densité f et que f est continue sur \mathbb{R} alors F_X est C^1 sur \mathbb{R} est $F' = f$

En effet :

1.3 Caractérisation des variables à densité.

Théorème.

Soit X une variable aléatoire, on note $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$

X est à densité **si, et seulement si**,
❶ F_X est continue sur \mathbb{R} (en entier) et
❷ F_X est de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points.

Démonstration :

En pratique.

Lorsqu'une variable aléatoire est définie par sa fonction de répartition F_X :

Si ❶ F_X est continue sur \mathbb{R} et ❷ de classe C^1 sauf en un nombre fini de points.
alors on peut affirmer que X est une variable à densité.

Si ❶ F discontinue en (au moins) un $x_0 \in \mathbb{R}$ ou si ❷ F n'est pas de classe C^1 en un nombre infini de points
alors on peut affirmer que X n'est pas une variable à densité.

Remarques :

- Dans ce théorème on fait l'hypothèse que F est une fonction de répartition donc on sait déjà que :

$$F \text{ est croissante, que } \lim_{-\infty} F = 0 \text{ et que } \lim_{+\infty} F = 1$$

- Les variables discrètes ne sont pas à densité, mais il en existe d'autres, des variables ni discrètes, ni à densité.

1.4 Loi de X .

Dans ce chapitre, donner la loi d'une variable aléatoire X , c'est justifier que X admet une densité et en donner une.

En pratique : (Le plus souvent).

- ❶ On détermine F_X la fonction de répartition de X .
- ❷ On vérifie que F_X est continue sur \mathbb{R} en entier, qu'elle est C^1 sauf en un nombre fini de points.
- ❸ On peut alors affirmer que X est une variable à densité.
- ❹ On détermine alors une densité de X en dérivant F_X sur les intervalles où elle est dérivable.

1.5 Deux premiers exemples usuels.

Définition : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]a, b[)$

Soient X une variable aléatoire, a et b deux réels vérifiant $a < b$,

Dire que X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ ou $]a, b[$ signifie que : X est de densité $f : t \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$.

Proposition.

X suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$ si, et seulement si, sa fonction de répartition est

F définie par : si $x < a$, $F(x) = 0$, si $x \in [a, b]$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ et sinon $F(x) = 1$.

Définition : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif, ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$)

Dire que X suit une loi exponentielle de paramètre λ signifie que :
 X est de densité $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

Proposition.

X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ si, et seulement si, sa fonction de répartition est : $F : x \mapsto (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

Méthodes pratiques.

Dans les deux propositions suivantes on note :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels vérifiant : $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$.

un nombre fini de points de \mathbb{R} .

on note : $D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

on remarque que $\mathbb{R} \setminus D$ (\mathbb{R} privé d'un nombre fini de points.) peut s'écrire :

$$\mathbb{R} \setminus D =]-\infty, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup \dots \cup]a_{n-1}, a_n[\cup]a_n, +\infty[$$

(C'est une réunion d'intervalles)

2.1 De la fonction de répartition à une densité.

Théorème

Soient F une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et X une variable aléatoire à densité.

si F est la fonction de répartition de X et si F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$

alors la fonction f définie par
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus D, & f(x) = F'(x) \\ \forall x \in D, & f(x) = 0 \end{cases}$$
 est une densité de X .

Remarques :

- On définit ici une des densités de X .
- Lorsque F est constante sur un intervalle alors f est nulle sur cet intervalle.
- Bien vérifier (*au brouillon*) à la fin de vos calculs que la fonction obtenue est bien une densité de probabilité.
La fonction f doit être positive, continue sauf sur D et son intégrale sur \mathbb{R} vaut 1.

En pratique :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, a_1[, & f(x) = F'(x) \\ \forall x \in]a_1, a_2[, & f(x) = F'(x) \\ \vdots \\ \forall x \in]a_n, +\infty[, & f(x) = F'(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(a_i) = 0 \quad (\text{choix arbitraire dans } \mathbb{R}^+)$$

Exemples : *Feville_Calculs_8*

2.2 D'une densité à la fonction de répartition.

Option 1. On utilise la définition : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

En notant f_0 la restriction de f sur $] -\infty, a_1[$, \dots , f_i sur $]a_i, a_{i+1}[$, \dots , f_n sur $]a_n, +\infty[$ on a :

$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty, a_1[, & F(x) = \int_{-\infty}^x f_0(t) dt \\ \forall x \in]a_1, a_2[, & F(x) = F(a_1) + \int_{a_1}^x f_1(t) dt \\ \vdots \\ \forall x \in [a_n, +\infty[, & F(x) = F(a_n) + \int_{a_n}^x f_n(t) dt \end{cases}$$

Remarque : On retrouve ci-dessus une présentation qui permet de retrouver les propriétés de régularité de F :
 F de classe C^1 partout sauf (éventuellement) sur D , F est continue sur \mathbb{R} .

Option 2. On utilise la proposition suivante.

Soient f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et X une variable aléatoire à densité.
 si f est une densité de X et si f est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ alors
 la fonction de répartition de X est une primitive de f sur tous les intervalles :
 $] -\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[$, \dots , $]a_{n-1}, a_n[$ et $]a_n, +\infty[$

Sur chaque intervalle on choisit la primitive de f qui vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{x \rightarrow a_i^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} F(x) = F(a_i) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Remarques :

- Lorsque f est nulle sur $]a_i, a_{i+1}[$ alors F est constante sur $]a_i, a_{i+1}[$
(encore vraie sur $] -\infty, a_1[$ et $]a_n, +\infty[$)
- Bien vérifier (*au brouillon*) à la fin de vos calculs que la fonction obtenue est bien une fonction de répartition.

Elle doit être croissante, continue sur tout \mathbb{R} , C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Exemples : *Feuille_Calculs_7*

2.2.1 En résumé.

- On passe de la fonction de répartition à une densité en dérivant sur chaque intervalle.
- On passe d'une densité à la fonction de répartition en déterminant une primitive sur chaque intervalle.
(La primitive qui permet à F d'être continue)

Attention.

- Dans le cours des fonctions dérivables sur un intervalle :
 - Quand on dérive une fonction F sur I , sa dérivée f est unique.
 - Quand on cherche une primitive de f sur I , il y a une infinité de primitives.
- Dans ce cours, c'est le contraire :
 - Pour une densité de probabilité f , il y a une unique fonction de répartition F .
 - Pour une fonction de répartition F , il y a une infinité de densité de probabilité.

Calculs de probabilité.

3.1 Des événements négligeables.

Proposition.

Soit X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On suppose X est une variable à densité, on note f une de ses densités.

- ❶ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\mathbb{P}(X = a) = 0$.
- ❷ Pour tout ensemble fini D , $\mathbb{P}(X \in D) = 0$.
- ❸ Pour tout ensemble dénombrable D , $\mathbb{P}(X \in D) = 0$.

Démonstration. *Feuille Cours_9_2*

3.2 Avec la fonction de répartition.

Proposition :

On considère X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On suppose X est une variable à densité, on note F sa fonction de répartition.

- ❶ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ on a : $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F(b) - F(a)$.
on peut remplacer $[a, b]$ par $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$.
- ❷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que on a : $\mathbb{P}(X \in]-\infty; a]) = F(a)$.
on peut remplacer $] - \infty; a]$ par $] - \infty; a[$.
- ❸ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que on a : $\mathbb{P}(X \in [a; +\infty[) = 1 - F(a)$.
on peut remplacer $[a; +\infty[$ par $]a; +\infty[$.

En effet :

3.3 Avec une densité.

Proposition.

Soit X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On suppose X est une variable à densité, on note f une de ses densités.

- ❶ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ on a : $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t) dt$.
- ❷ Pour tout (a, b) tel que $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ on a : $\mathbb{P}(X \in]a, b[) = \int_a^b f(t) dt$.

En effet :

Remarque : Dans ce contexte on pourra utiliser la notation : $\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f(t) dt$.

3.4 Valeurs prises par X.

Définition. (*Valeurs de X*)

Soient X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et I un intervalle de \mathbb{R} , dire que X est (*quasiment*) à valeurs dans I signifie que $\mathbb{P}(X \in I) = 1$

Remarques :

- On peut étendre cette définition en remplaçant I par une réunion dénombrable d'intervalles.
- L'événement $(X \in I)$ est quasi-certain.
- Lorsqu'on observe la réalisation de cette expérience, on est quasi-certain que X prend une valeur dans I .
- En pratique on pourra supprimer " (*quasiment*) "

Proposition. (*Valeurs prises et densité*)

Soit X une variable aléatoire à densité,
 X est (*quasiment*) à valeurs dans I
 si, et seulement si il existe une densité de X qui est nulle en dehors de I .

En effet :

Proposition. (*Valeurs prises et fonction de répartition*)

Soit X une variable aléatoire à densité et a, b deux réels,
 X est (*quasiment*) à valeurs dans $[a, b]$
 si, et seulement si, $\forall x \leq a, F(x) = 0$ et $\forall x \geq b, F(x) = 1$

En effet :

Remarque : Certains s'autorisent $X(\Omega) = I$, mais cette notation peut amener des questions inutiles.

3.5 Indépendance

Définition. *Indépendance de deux variables aléatoires à densité.*

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) ,
 X et Y sont indépendantes si, et seulement si :
 quel que soit le couple (x, y) de réels, $P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y)$

Quel que soit le couple (x, y) de réels, $P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = F_X(x) \times F_Y(y)$

Quel que soit le couple (x, y) de réels, $P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt \times \int_{-\infty}^y f_Y(t)dt$

Définition *Indépendance de n variables aléatoires à densité.*

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une liste de variables aléatoires à densité sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .
 Les X_k sont (mutuellement) indépendantes si, et seulement si, :
 quel que soit la liste $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels, $P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq x_k)\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x_k)$

Revoir le cours donnant les propriétés communes à toutes les variables aléatoires . (lemme de coalition ...)

Exemples de recherche de la loi de $u(X)$.

Notation de $u(X)$.

Soient X une variable à densité, I un intervalle et u une fonction usuelle définie sur I .
 Si X est (*quasiment*) à valeurs dans I , alors on peut définir la variable aléatoire $\omega \mapsto u(X(\omega))$.
 on note : $u(X)$ cette variable aléatoire.

Remarques :

- Dans le cours sur les applications on aurait noté $u \circ X$ cette variable aléatoire.
- $u(X)$ est bien une variable aléatoire si u est simple, mais il arrive que $u(X)$ n'en soit pas une, mais cela dépasse le cadre de ce cours.

Exemples. *Feuille Cours_9_3.*

Proposition.

Soient X une variable à densité, I un intervalle et u une fonction définie sur I .
 Si X est à valeurs dans I , alors $u(X)$ est à valeurs dans $u(I)$

En effet :

Remarque : $u(I)$ est l'image directe de I par u , on l'obtient en dressant le tableau de variations de u sur I .

Exemples. *Feuille Cours_9_3.*

En pratique :

On connaît la densité de X et on répond à la question "Donner la loi de $Y = u(X)$."

- 1 On détermine les valeurs prises par X . (*On note I*)
- 2 On détermine la fonction de répartition F_X de X .
- 3 On détermine J l'ensemble des valeurs prises par Y . (*Tableau de variations de u sur I*)

En posant $u : x \mapsto x^2$

x	-1	0	1
u	1	↘ 0	↗ 1

- 4 Pour $y \in J$,
on exprime $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ avec F_X
puis $F_Y(y)$ en fonction de y .
- 5 On donne les expressions définissant F_Y sur \mathbb{R} en entier.

- 6 On justifie que Y est une variable densité avec sa fonction de répartition.

F_Y est de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf (éventuellement) en un nombre fini de réels et F_Y est continue sur \mathbb{R} en entier.

- 7 On déduit de F_Y une densité de Y en dérivant sur les intervalles ouverts où elle est dérivable.

Espérance. Propriétés.

Définition.

On considère X une variable aléatoire réelle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On suppose X est une variable à densité, on note f une de ses densités.

Dire que X admet une espérance signifie que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est absolument convergente.

et lorsque cette condition est vérifiée on définit l'espérance de X par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$.

Remarques :

- Pour f une densité de probabilité on a l'équivalence : (*mais en pratique je ne m'en sers pas*).

$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est absolument convergente si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

- Certaines variables à densité n'admettent pas d'espérance.
- Quand $E(X) = 0$, on dit que la variable est centrée.

Exemples. Feuille Cours_9_4

5.1 Théorème de transfert.

Soient X une variable aléatoire réelle de densité f , telle que X est à valeurs dans $]a, b[$
 $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$

et $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$\varphi(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\int_a^b \varphi(t)f(t)dt$ est absolument convergente.

et alors : $E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t)f(t) dt$

Remarques :

- On obtient l'espérance de $\varphi(X)$ avec la densité de X .
- Toujours la même remarque sur la notion d'équivalence :
 Si $\int_a^b |\varphi(t)| \cdot f(t) dt$ ne converge pas alors $\varphi(X)$ n'admet pas d'espérance.
 Si $\int_a^b |\varphi(t)| \cdot f(t) dt$ converge alors $\varphi(X)$ admet une d'espérance.
- Ici on a bien besoin de la condition d'absolue convergence. (*voir la remarque précédente sur l'espérance*)

Exemples. Feuille Cours_9_4

5.2 Variance d'une variable aléatoire.

5.2.1 Définition

Définition *Rappel*

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance $E(X)$.
Lorsque la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance on dit que X admet une variance et on définit sa variance par

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Remarques :

- Retenir que certaines variables aléatoires n'ont pas d'espérance.
- Dire qu'une variable aléatoire est **réduite** signifie que sa variance est égale à 1.
- En notant $m = E(X)$, cela donne pour X une variable aléatoire à densité : (*théorème de transfert*)

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - m)^2 f(t) dt \quad (\text{en cas de convergence})$$

- Si X est une variable à densité alors $V(X) \neq 0$.

Exemples. *Feuille Cours_9_4*

5.2.2 Formule de Kœnig-Huygens.

Théorème : (*Formule de Kœnig-Huygens*).

Soit X est une variable aléatoire réelle,

X admet une variance si, et seulement si, X et X^2 admettent une espérance.

$$\text{et alors :} \quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (\text{en cas de convergence})$$

Remarque :

En notant $m = E(X)$, cela donne pour X une variable aléatoire à densité : (*théorème de transfert*)

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - m^2 \quad (\text{en cas de convergence})$$

Exemples. *Feuille Cours_9_4*

Lois à densité usuelles.

On considère X une variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{F}, \mathbb{P})$ quelconque.

6.1 Lois uniformes à densité.

Définition :

Soient a, b deux réels vérifiant $a < b$

Dire que X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ signifie que la fonction $\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}$ est une densité de X .

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$

Proposition : *Caractérisation avec la fonction de répartition.*

Soient X une variable aléatoire et a, b deux réels ($a < b$) on note F la fonction de répartition de X ,

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]) \text{ si, et seulement si, } F \text{ est la fonction définie par } \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases} .$$

Remarque : *on peut reconnaître une loi uniforme avec sa fonction de répartition.*

Représentation graphique.

Proposition. (*Stabilité des lois uniformes par transformation affine $t \mapsto mt + p$*)

Soient X une variable aléatoire, a, b, m et p quatre réels vérifiant $a < b$ et $m \neq 0$

- lorsque $m > 0$, Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors $mX + p \hookrightarrow \mathcal{U}([ma + p, mb + p])$.
- lorsque $m < 0$, Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors $mX + p \hookrightarrow \mathcal{U}([mb + p, ma + p])$.

Démonstration. (*Faite au tableau*)

A retenir : Si X suit une loi uniforme sur un segment alors $mX + p$ aussi.

Remarques.

- Les réciproques sont vraies.

- $[a, b] \longrightarrow [ma + p, mb + p]$ est une bijection et sa réciproque est $[ma + p, mb + p] \longrightarrow [a, b]$
 $x \longmapsto mx + p \qquad \qquad \qquad x \longmapsto \frac{x - p}{m}$

Cela autorise les raisonnements suivants :

- ① $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ donc $X - a \hookrightarrow \mathcal{U}([0, b - a])$ donc $\frac{X - a}{b - a} \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$
- ② $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ donc $(b - a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, b - a])$ donc $a + (b - a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$

Exemples :

- Si on sait que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 2])$ alors on peut en déduire que $2X - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 3])$
- Si on sait que $2X + 3 \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 2])$ alors on peut en déduire que $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[-2, -\frac{1}{2}\right]\right)$
- Si on sait que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$ alors on peut en déduire que $2 - X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 3])$
- Si on sait que $2 - 3X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ alors on peut en déduire que $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$

(Simulation des lois uniformes)

En Python, le module `random` peut être importé via `import random as rd`,
`rd.random()` - - - - - Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

Pour simuler une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, il suffit d'utiliser l'instruction

$$a + (b - a) * rd.random()$$

Pour simuler une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[m - \frac{h}{2}, m + \frac{h}{2}\right]\right)$, on utilise :

$$m + h/2 * (-1 + 2 * rd.random())$$

Remarque : En physique vous utilisez le module `numpy.random` et la fonction `uniform(a, b, N)`

Proposition.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ ($a < b$), alors elle admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{a + b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b - a)^2}{12} \qquad \sigma(X) = \frac{b - a}{\sqrt{12}}$$

Démonstrations. *Feuille Cours_9_ter*

Remarque si $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[m - \frac{h}{2}, m + \frac{h}{2}\right]\right)$, alors

$$E(X) = \dots\dots\dots \qquad V(X) = \dots\dots\dots \qquad \sigma(X) = \dots\dots\dots$$

Remarque sur les incertitudes :

6.2 Lois exponentielles.

Définition :

Soit λ un réel strictement positif, ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$)

Dire que X suit une loi exponentielle de paramètre λ signifie que :

la fonction $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$ est une densité de X .

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Proposition :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ si, et seulement si, sa fonction de répartition est $t \mapsto (1 - e^{-\lambda t}) \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$.

Remarque : on peut reconnaître une loi exponentielle avec sa fonction de répartition.

Représentation graphique.

Proposition.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors elle admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstrations. *Feuille Cours_9_4*

Proposition.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Démonstration.

(Simulation des lois exponentielles)

En Python, on importe `random` et `math` via `import random as rd` et `from math import *`

Pour simuler une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, ($a > 0$) il suffit d'utiliser l'instruction

`-1/a*log(1 - rd.random())` ou `-1/a*log(rd.random())`

Voir la feuille_Exo_18 Ex 1

Proposition. (*Absence de mémoire*)

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^*, P_{X>t_1}(X > t_1 + t_2) = P(X > t_2)$

Démonstration.

Remarques :

- ❶ Attention à l'autre notation des probabilités conditionnelles :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^*, P(X > t_1 + t_2 | X > t_1) = P(X > t_2)$$

- ❷ Les lois exponentielles permettent de modéliser la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, exemples classiques : composant électronique, désintégration d'un atome radioactif.

- ❸ Si on sait qu'à l'instant t_1 le composant fonctionne toujours, sa durée de vie suit toujours la même loi qu'au début de sa vie.

En particulier :

Si on sait qu'à l'instant t_1 le composant fonctionne toujours, son espérance de vie est toujours la même.

- ❹ On pourrait montrer que cette implication est une équivalence.

6.3 Lois normales.

6.3.1 Loi normale centrée réduite.

Définition :

Dire que X suit la loi normale centrée réduite signifie que :

la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de X .

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Remarque : on a admis que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$ pour les autres propriétés Voir feuille Cours_10

Proposition.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors elle admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = 0 \quad V(X) = 1 \quad \sigma(X) = 1$$

Démonstrations Voir feuille Cours_10

6.3.2 Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

On note dans ce chapitre Φ la fonction de répartition de la loi centrée réduite.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Remarque : On ne sait pas exprimer Φ à l'aide des fonctions usuelles.

Pour les calculs numériques on utilise une table de valeurs ou un outil informatique. Voir la feuille Cours_10_3.

Proposition.

- ❶ Φ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
- ❷ Φ réalise une bijection continue et strictement croissante de \mathbb{R} dans $]0, 1[$.
- ❸ Pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. En particulier, $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Démonstration Voir feuille Cours_10

Remarque : La courbe représentative de Φ est symétrique par rapport à $A(0, \frac{1}{2})$.

Proposition.

Pour toute variable aléatoire réelle X , $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ si, et seulement si, $-X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration. Voir feuille Cours_10

Définition

On appelle **fonction des quantiles** de la loi centrée réduite, la réciproque de la bijection $\mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[$
 $x \longmapsto \Phi(x)$

On note dans ce cours $\Phi^{-1} : \alpha \longmapsto u_\alpha$. $\Phi^{-1}(\alpha) = u_\alpha$

Remarques :

- On peut aussi noter cette fonction comme dans le cours sur les applications Φ^{-1} .
- Pour $\alpha \in]0, 1[$, u_α est le **quantile d'ordre α de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$** .
- Pour $\alpha \in]0, 1[$, u_α est l'unique réel x vérifiant $\Phi(x) = \alpha$.

Propositions.

- ❶ $\alpha \mapsto u_\alpha$ est une bijection continue et strictement croissante de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} .
- ❷ Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\Phi(u_\alpha) = \alpha$
- ❸ Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$
- ❹ Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha$

Démonstrations. Voir feuille Cours_10.

Proposition.

Soit X une variable aléatoire,
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ alors $\Phi^{-1}(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration. Voir feuille Cours_10

(Simulation de la loi normale centrée normale)

Option 1. (Dans le formulaire donné à l'oral de l'agro-véto.) En Python, le module `random` peut être importé via `import random as rd`,
`rd.gauss(0, 1)` ----- Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Option 2. (En utilisant la proposition précédente.)
En Python, on peut importer Φ^{-1} via `from scipy.stats import norm`

```
norm.ppf      # percent point function  
norm.ppf(rd.random()) ----- Simule une réalisation d'une variable  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .
```

Remarque : En physique vous utilisez le module `numpy.random` et la fonction `normal(0, 1, N)`

Le programme suivant illustre l'utilisation du module `scipy.stats`.

```
from scipy.stats import norm      # norm : normal continuous random variable
```

```
f = norm.pdf      # probability density function  
F = norm.cdf      # cumulative distribution function  
u = norm.ppf      # percent point function
```

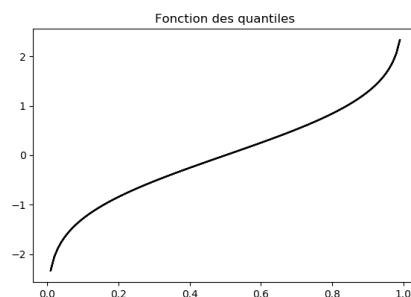
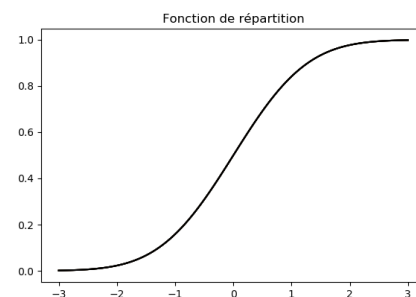
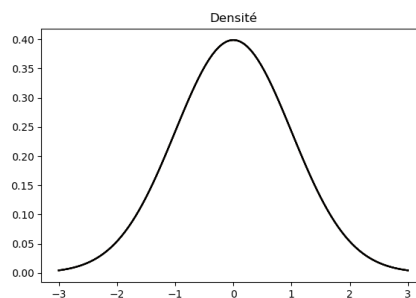
```
N= 100  
a = -3  
b = 3
```

```
x = [a+k*(b-a)/N for k in range(N+1)]  
plt.subplot(221)  
y = [ f(t) for t in x ]  
plt.plot(x, y, 'k')  
plt.title('Densité')
```

```
plt.subplot(223)  
y = [ F(t) for t in x ]  
plt.plot(x, y, 'k')  
plt.title('Fonction de répartition')
```

```
x = [ 0 + k *1/N for k in range(1,N)]  
plt.subplot(224)  
y = [ u(t) for t in x ]  
plt.plot(x, y, 'k')  
plt.title('Fonction des quantiles')
```

```
plt.show()
```

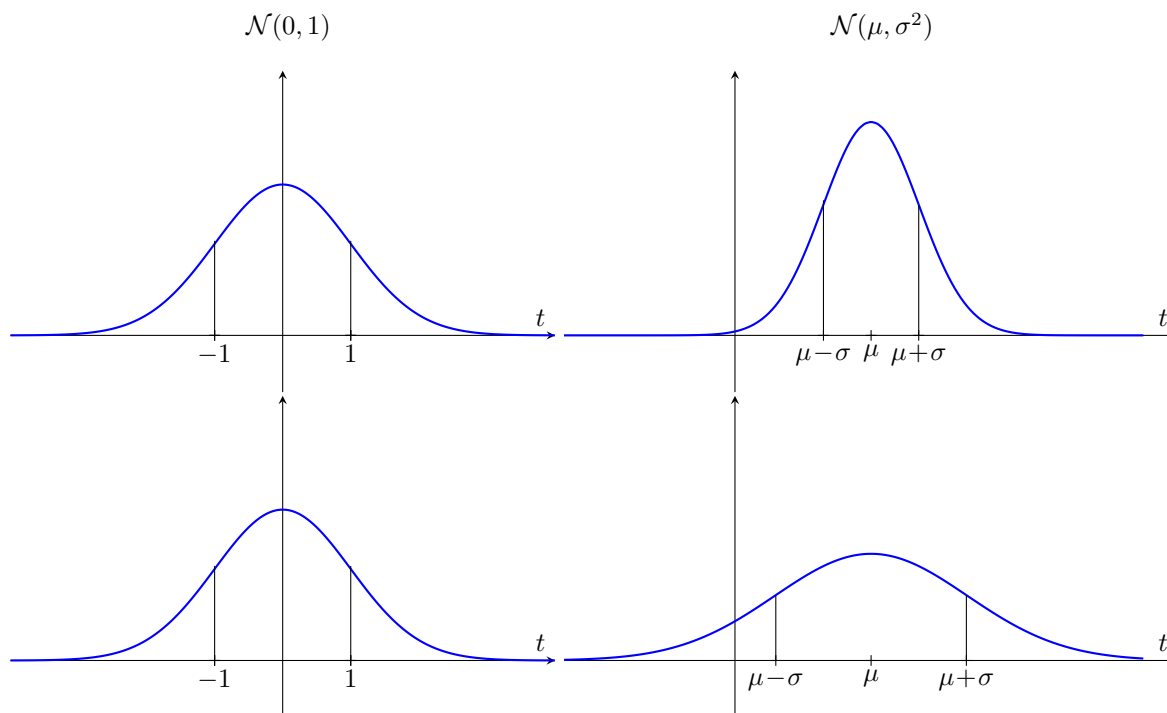


6.3.3 Lois normales quelconques.

Définition.

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.
 Dire que X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ signifie que
 X est une variable aléatoire à densité et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ est une densité de X .

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2).



Cloche de Gauss

Remarques :

- les points d'inflexion sur la courbe de la densité de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sont aux points de coordonnées $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.
- On dit aussi que X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ou encore que X est une gaussienne.
- Attention certains auteurs notent : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ).

C'est le cas de fonctions Python

Proposition.

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.
 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si, et seulement si, sa fonction de répartition est $F_X : x \mapsto \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$

En effet :

Théorème.

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.
 en notant : $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ on a : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration.

Proposition.

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.
 si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $E(X) = \mu$ $V(X) = \sigma^2$ $\sigma(X) = \sigma$

Démonstration.

Théorème. (Stabilité de l'ensemble des lois normales par transformation affine).

Soient X une variable aléatoire, σ un réel strictement positif et μ un réel quelconque.
 Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a \neq 0)$
 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si, et seulement si, $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Démonstration : On pose $Y = aX + b$.

$E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2V(X)$ donc $E(Y) = a\mu + b$ et $V(Y) = a^2\sigma^2$

$Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}$ or $E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2V(X)$ donc $Y^* = \frac{a}{|a|}X^*$

• si $a > 0$,

$$\begin{aligned}
 Y \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2) &\iff Y^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\
 &\iff X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) && \text{en effet ici : } \frac{a}{|a|} = 1 \\
 &\iff X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)
 \end{aligned}$$

• si $a < 0$,

$$\begin{aligned}
 Y \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2) &\iff Y^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\
 &\iff -X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) && \text{en effet ici : } \frac{a}{|a|} = -1 \\
 &\iff X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) && \text{vu en cours} \\
 &\iff X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)
 \end{aligned}$$

Remarques :

- Ce qu'il faut retenir : **Si X suit une loi normale alors $aX + b$ suit une loi normale**
 pour les paramètres il suffit d'utiliser : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mu + \sigma X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

(Simulation de la loi normale)

Option 1.
 En Python, le module `random` peut être importé via `import random as rd`

```
m + sqrt(v)*rd.gauss(0, 1) - - - - - Simule une réalisation d'une variable  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, v)$ .
```

Option 2.
 En Python, on peut importer Φ^{-1} via `from scipy.stats import norm`

```
norm.ppf # percent point function
```

```
m+sqrt(v)*norm.ppf(rd.random()) - - - - Simule une réalisation d'une variable  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, v)$ .
```

Remarques :

- `rd.gauss(mu, sigma)` renvoie :
 un flottant aléatoire suivant une distribution gaussienne d'espérance `mu` et de variance `sigma`²
- En physique certains utilisent le module `numpy.random` et la fonction `normal(a, b, N)`
 Attention : `a` est l'espérance et `b` est l'écart-type.

Somme de variables aléatoires à densité indépendantes.

7.1 Produit de convolution.

Définition.

Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R} sauf peut-être en un nombre fini de points.

On appelle produit de convolution de f et de g la fonction :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

Théorème.

Soient X et Y deux variables aléatoires de densité respective f et g ,

Si X et Y sont indépendantes alors :

- $X + Y$ est une variable à densité.
- $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$ est une densité de $X + Y$.

Remarques :

- Les sujets devront vous rappeler ce théorème.
- $X + Y = Y + X$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

- Rappel : Pour deux variables discrètes indépendantes X et Y , en notant $Z = X + Y$:

$$\text{Pour tout } z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P(Y = z - x)$$

formule des probabilités totales et indépendance

Exemples : (Voir la feuille Cours_10_2)

Revoir la somme de deux lois exponentielles de même paramètre ou de deux uniformes sur $[0, 1]$.

Attention à l'usage des fonctions indicatrices dans ce contexte.

7.2 Somme de variables aléatoires normales indépendantes.

Théorème. (*Stabilité de l'ensemble des lois normales par combinaison linéaire*)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, σ_1, σ_2 deux réels strictement positifs et μ_1, μ_2 deux réels quelconques.

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes

❶ alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Si de plus α_1, α_2 sont deux réels (tels que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$)

❷ alors $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2, \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2)$

Démonstration : Voir l'Ex_7 feuille Cours_10_2, non fait en classe.

Généralisation.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ des variables aléatoires, $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq n}$ des réels strictement positifs, $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ des réels quelconques tels que les α_k sont tous nuls.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ et si les X_k sont (*mutuellement*) indépendantes

alors

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \sigma_k^2\right)$$

Démonstration. (*Récurrence + lemme de coalition*)

Corollaire.

Toute combinaison linéaire (*non nulle*) de gaussiennes mutuellement indépendantes est une gaussienne.

En pratique : Il suffit de connaître ce corollaire.

Avec pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ et $Y = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$

❶ Les X_k sont des gaussiennes mutuellement indépendantes donc Y suit une loi normale.

❷ Par linéarité de l'espérance on obtient $E(Y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k E(X_k)$, on note μ ce réel.

❸ Les variables X_k sont mutuellement indépendantes donc $V(Y) = \sum_{k=1}^n V(\alpha_k X_k)$

et comme $V(aX + b) = a^2 V(X)$ il vient : $V(Y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 V(X_k)$, on note σ^2 ce réel.

On peut alors conclure : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)}$ où $\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k$ et $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \sigma_k^2$

Exemples : Exercices 1 et 2 de la Feuille Exo_19.