Colles de mathématiques - Semaine 16 - du 03/02/25

La colle commencera par une ou deux questions de cours

Les démonstrations de cours classiques pourront être données en exercices.

(Pas d'informatique cette semaine)

- **Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée. Diagonalisation.**

  Définition d'une valeur propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Définition du spectre.
  Différentes caractérisations des valeurs propres.
  Définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme, d'une matrice.
  Définition du sous-espace propre (noté $E_\lambda(f)$ ou $E_\lambda(M)$).
  Spectre d'une matrice triangulaire.

  En dimension finie,

  lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.

  En dimension quelconque :
  Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
  Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

  En dimension n :
  Un endomorphisme a au plus n valeurs propres distinctes, *même proposition pour une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

  La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure à n.

  Définition d'un endomorphisme diagonalisable. Définition d'une matrice carrée diagonalisable.

  (Condition suffisante)
  Un endomorphisme d'un espace de dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
  (et alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1*)*

  (Condition nécessaire et suffisante)
  Un endomorphisme d'un espace de dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable
  si, et seulement si, la somme des dimensions de leurs sous-espaces propres est égale à n.

  "Diagonaliser un endomorphisme f" signifie déterminer une base de E pour laquelle $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

  "Diagonaliser une matrice carrée M" signifie déterminer deux matrices : $\begin{cases} P \text{ inversible} \\ \Delta \text{ diagonale} \end{cases}$, telles que $M = P\Delta P^{-1}$.

  Calcul de puissances de matrice. Système différentiel.

- **Révisions.**

  Nombres complexes.
  Factorisation des polynômes.

– –

Exemples de question de cours ou d'application directe du cours :

- Définition d'une valeur propre d'un endomorphisme. Définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme.
- Définition d'une valeur propre d'une matrice carrée. Définition d'un vecteur propre d'une matrice carrée.
- Définition du sous-espace propre d'un endomorphisme associé à une valeur propre λ.
- Définition du sous-espace propre d'une matrice associé à une valeur propre λ.
- Définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base d'un espace vectoriel.
- Donner une des deux définitions de deux matrices semblables.
- Enoncer le théorème du rang pour un endomorphisme, pour une matrice carrée ou pour une matrice quelconque.
- Donner le lien entre la dimension de $E_\lambda(M)$ et le rang de $M - \lambda I_n$.
- Déterminer le spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- Déterminer une base des sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- Diagonaliser une matrice carrée. *(c'est à dire trouver P inversible et Δ diagonale telles que $M = P\Delta P^{-1}$)*
- Diagonaliser un endomorphisme. *(c'est à dire trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale)*
- Calcul de puissances d'une matrice. Système différentiel.