BCPST 2_A

Correction du devoir maison rendu le 30 janvier 2025

EXERCICE 1.

1) a)

$$\begin{aligned}(A-I)^2 &= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{(A-I)^2 = 0}$$

b) La relation $(A-I)^2 = 0$ peut aussi s'écrire $A^2 - 2A + I = 0$ ou encore $A(2I - A) = I$ et $(2I - A)A = I$, ce qui entraine *(définition d'une matrice inversible)* que

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = 2I - A}$$

2) On pose $A = N + I$.

a) Les matrices I et N commutent et $A = I + N$ donc en appliquant la formule du binôme on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$$

on a montré aussi que $N^2 = 0$ donc que : $\forall k \geqslant 2, \quad N^k = 0$ on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = I + nN}$$

et comme $N = A - I$ on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (1-n)I + nA}$$

b) On a vu à la question 1)b) que $A^{-1} = 2I - A$ et pour $n = -1$, $(1-n)I + nA = 2I - A$

$$\boxed{\text{l'expression } A^n = (1-n)I - nA \text{ est aussi valable pour } n = -1}$$

3) a) Soit λ une valeur propre de A associée au vecteur propre X
on déduit de $(A-I)^2 = 0$ et $AX = \lambda X$ que $(\lambda - 1)^2 X = 0$ et comme $X \neq 0$ il vient :

l'unique valeur propre possible de A est 1.

De plus $(A - I) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ qui est de rang $1 \neq 3$ donc 1 est bien est une valeur propre.

$$\boxed{\text{Le spectre de } A \text{ est } \{1\}}$$

b) le rang de $A - I$ est égal à 1 donc le sous-espace propre $E_1(A)$ est de dimension 2,
$A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et la somme des dimensions des sous-espaces propres est différent de 3 donc

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

4) On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) $(A - I) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ donc *(toutes les colonnes sont proportionnelles)* $\mathrm{rg}(A - I) = 1$
or $A - I$ est la matrice de $f-$ id dans la base canonique donc

$$\boxed{\text{le rang de } f - \mathrm{id} \text{ est égal à } 1}$$

b) $(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ donc $u_1 = (-1,-2,1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$ donc $u_2 = (1,0,1)$.

① $(A-I)\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $u_1 \in \ker(f-id)$ et $(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $u_2 \in \ker(f-id)$

② u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels donc (u_1, u_2) est une famille libre.

③ le rang de $f-$ id est égal à 1 et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc $\dim(\ker(f-\mathrm{id})) = 2$

En conclusion de ① , ② et ③ on a bien

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } \ker(f-\mathrm{id})}$$

5) a) La matrice de la famille (u_1, u_2, e_1) dans la base canonique est égale à $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} rg\,(u_1,u_2,e_1) &= rg\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} \\ &= rg\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\-2 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ &= 3 \qquad \text{(matrice échelonnée)} \end{aligned}$$

Donc (u_1, u_2, e_1) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ d'où :

$$\boxed{(u_1, u_2, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

b) D'après 4)b), $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ de plus $f(e_1) = (0,-2,1)$ donc $f(e_1) = u_1 + e_1$.

et ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } (u_1,u_2,e_1) \text{ est } T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

6) La matrice $P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ dans la base (u_1, u_2, e_1)

donc *(formule de changement de bases)*

$$\boxed{P \text{ est inversible et } A = PTP^{-1}}$$

7) a) Soit $M = \begin{pmatrix}m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3}\\m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3}\\m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} MT = TM \iff & \begin{pmatrix}m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3}\\m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3}\\m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3}\\m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3}\\m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix}m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3}\\m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3}\\m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3}\\m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3}\\m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix}0 & 0 & m_{1,1}\\0 & 0 & m_{2,1}\\0 & 0 & m_{3,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} m_{1,1} = m_{3,3} \\ m_{2,1} = 0 \\ m_{3,1} = 0 \\ m_{3,2} = 0 \end{cases} \\ \iff & M = m_{3,3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + m_{1,2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + m_{1,3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + m_{2,2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + m_{2,3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{E = \operatorname{Vect}(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})\,.}$$

On a de plus $a(E_{1,1}+E_{3,3})+bE_{1,2}+cE_{1,3}+dE_{2,2}+eE_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a=b=c=d=e=0$

donc $(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une base de E.

$$\boxed{\dim(E) = 5}$$

b) Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcll} NA = AN & \iff & N(PTP^{-1}) = (PTP^{-1})N & \textit{(car } A = PTP^{-1}\textit{)} \\ & \iff & NPT = PTP^{-1}NP & \textit{(car } P \textit{ est inversible)} \\ & \iff & P^{-1}NPT = TP^{-1}NP & \textit{(car } P^{-1} \textit{ est inversible)} \end{array}$$

$$\boxed{NA = AN \quad \iff \quad \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right).}$$

Remarque : Dans ce raisonnement on utilise :

Si C est inversible alors $A = B \iff CA = CB$ et $A = B \iff AC = BC$

Sans l'hypothèse "C est inversible" l'équivalence est fausse.

c) Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
On vient de montrer que : $N \in F$ si, et seulement si, $P^{-1}NP \in E$
or
$M \in E \iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 :\ M = a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3}$
donc
$N \in F \iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 :\ M = aP(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} + dPE_{2,2}P^{-1} + ePE_{2,3}P^{-1}$
donc

$$\boxed{F = \operatorname{Vect}\left(P\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\right)}$$

EXERCICE 2.

1)

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \left(1-t^2\right) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^2 dt \\ &= \int_0^1 \left(1-2t^2+t^4\right) dt \\ &= \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{8}{15}}$$

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt - \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt \\
&= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \left((1-t^2)-1\right) dt \\
&= -\int_0^1 t^2 \left(1-t^2\right)^n dt \ \leqslant \ 0 \qquad \text{car} \quad \forall t \in [0,1], \quad t^2\left(1-t^2\right)^n \geqslant 0
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

b) $\forall t \in [0,1], \quad \left(1-t^2\right)^n \geqslant 0 \quad$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt \geqslant 0$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc *(Théorème de convergence monotone)*

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

3) a) $t \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ est une densité de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt &= \sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \qquad \text{en posant } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2n}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

et comme la fonction $t \longmapsto e^{-nt^2}$ est paire, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

c) On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1$ *(Pour le démontrer on étudie la fonction $x \longmapsto e^x - (x+1)$)*
on en déduit *(avec $x = -t^2$)*

$$\boxed{\text{pour tout réel } t, \text{ on a : } e^{-t^2} \geq 1 - t^2}$$

d) Pour $t \in [0,1], \quad 0 \leqslant 1-t^2$ et d'après 3)c) $1 - t^2 \leqslant e^{-t^2}$ donc $0 \leqslant 1-t^2 \leqslant e^{-t^2}$
ce qui entraine que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \ 0 \leqslant (1-t^2)^n \leqslant e^{-nt^2}$$

ce qui entraine *(croissance de l'intégrale)* :

$$0 \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{dt} \leqslant \int_0^1 e^{-nt^2} \, \mathrm{dt}$$

or $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2} \, \mathrm{dt} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$ *(En effet l'intégrande est positive)*

$u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{dt}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ donc

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}=0$ on en déduit que *(théorème des gendarmes)* : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$

e) Pour $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1(1-t)^n dt=\Big[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1(1-t)^n dt=\frac{1}{n+1}}$

De plus $\forall t\in[0,1]$, $(1-t)^n\leqslant(1-t^2)^n$ *(En effet : sur $[0,1]$, $t^2\leqslant t$)* donc $\boxed{\displaystyle\frac{1}{n+1}\leqslant u_n}$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle 0\leqslant\frac{1}{n+1}\leqslant u_n$ et on sait que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ diverge *(série harmonique)*,

donc *(Théorème de convergence par comparaison.)*

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ est divergente}}$$

4) a) $t\longmapsto t$ et $t\longmapsto(1-t^2)^{n+1}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc on peut faire l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_0^1 1\times(1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t\\
&= \Big[t\times(1-t^2)^{n+1}\Big]_0^1-\int_0^1 t\times\Big(-2(n+1)t\left(1-t^2\right)^n\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= (2n+2)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
u_n-u_{n+1} &= \int_0^1\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t-\int_0^1\left(1-t^2\right)^{n+1}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\left(1-\left(1-t^2\right)\right)\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } u_{n+1}=(2n+2)\left(u_n-u_{n+1}\right)}$$

On en déduit : $\boxed{\displaystyle\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}\,u_n}$

b) Montrons par récurrence sur n que $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

- Pour $n=0$,

  $u_0=1$ et $\displaystyle\frac{4^0(0!)^2}{(0+1)!}=1$ donc la propriété est vérifiée pour $n=0$

- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\displaystyle u_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$,

  comme on sait de plus que $\displaystyle u_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}\,u_n$ il vient :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\\
&= \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}\times\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\\
&= \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \qquad \text{(on retrouve la propriété au rang } n+1\text{)}
\end{aligned}$$

  Si la propriété est vraie au rang n alors elle l'est au rang $n+1$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

c)

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \\
&\sim \frac{4^n (n!)^2}{2\,(2n)!} \\
&\sim \frac{4^n \left(\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\right)^2}{2\,\sqrt{2\pi(2n)}\,(2n)^{2n} e^{-2n}} \qquad \text{(Formule de Stirling)} \\
&\sim \frac{4^n \times 2\pi n\, n^{2n} e^{-2n}}{2\,\sqrt{2\pi(2n)}\, 4^n\, n^{2n} e^{-2n}} \\
&\sim \frac{2\pi n}{2\,\sqrt{4\pi n}}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

5) *Informatique.*

a)
```
def question5a(n):
    if n == 0:
        return 1
    return (2*n)/(2*n+1)*question5a(n-1)
```

b)
```
def question5b(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = (2*k+2)/(2*k+3) * u
    return u
```

c)
```
def factorielle(n):
    x = 1
    for k in range(1, n+1):
        x = x*k
    return x

def puissance(x,n):
    s = x
    for k in range(n-1):
        s = s*x
    return s

def question5c(n):
    a = factorielle(n)
    b = factorielle(2*n+1)
    c = puissance(4, n)
    u = c*a*a/b
    return u
```

d) Le nombre d'opérations est beaucoup plus important dans la fonction de la question 5)c).