Feuille Exo_20 : Variables aléatoires à densité.

Ex 1 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$,
On note $Y = \min\left(\frac{1}{2}, X\right)$

1) Déterminer la fonction de répartition de Y.
2) Y est-elle une variable aléatoire à densité ?
3) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Ex 2 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2.
Calculer si possible l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

$$Y_1 = e^X \qquad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{X}} \qquad Y_3 = \sin(X) \qquad Y_4 = \lfloor X \rfloor$$

Ex 3 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : si $x \in [0,1]$, $\quad f(x) = ax(1-x)$; $\quad$ sinon $\quad f(x) = 0$

1) Pour quelle valeur de a, f est-elle une densité de probabilité ?
2) Calculer alors l'espérance d'une variable X admettant f pour densité.
3) Déterminer la fonction de répartition de X. *(Faire une représentation graphique).*
4) Déterminer la loi des variables $Y = X^2$ et $Z = \lfloor 2X \rfloor$?
5) Calculer alors l'espérance des variables Y et Z.

Ex 4 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2
On note $Y = X - \lfloor X \rfloor$,

1) Montrer que : $\quad (Y \leqslant \frac{1}{2}) = \left(X \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+\frac{1}{2}]\right)$
2) Montrer que $P(Y \leqslant \frac{1}{2}) = \frac{e}{1+e}$
3) Illustrer graphiquement ce résultat.
4) Déterminer la loi de Y.
5) Calculer si possible l'espérance de Y.

Ex 5 : Une machine neuve a une durée de vie en années notée X. On suppose que X suit une loi exponentielle d'espérance 10 ans. Elle est vendue avec une garantie de 5 ans.

1) Déterminer la probabilité d'avoir une panne pendant la période de garantie.
2) Quelle est la probabilité que la machine dure moins de dix ans sachant qu'elle vient de dépasser la période de garantie ?

Ex 6 : Le nombre N_t de personnes arrivant à un bureau de poste entre les instants 0 et t suit une loi $\mathcal{P}(\lambda t)$ avec $\lambda > 0$. Le n-ème client arrive au temps X_n.

1) Déterminer, pour $t \in \mathbb{R}_+, P(X_1 > t)$ et en déduire la loi de X_1
2) Montrer que pour tout $n \geq 2, \forall t \geq 0, F_{X_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$.
3) En déduire que, pour $n \geq 2, X_n$ admet pour densité :

$$f_n : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

4) En déduire qu'une var X qui admet pour densité $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)(X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda))$ admet des moments de tout ordre qu'on donnera.
5) Montrer qu'elles existent et calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Problème

Dans tout le problème λ désigne un réel strictement positif, n un entier naturel, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k \in [\![1, p]\!]$. Si X désigne une variable aléatoire à densité alors F_X désigne la fonction de répartition de X, f_X une densité de X et on note $\overline{F}_X$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\overline{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$.

Dans la partie A, on étudie quelques propriétés classiques des lois exponentielles. La partie B est consacrée au calcul d'une limite d'une probabilité conditionnelle. Enfin, dans la partie C, on étudie la somme de certaines variables aléatoires. Ces parties peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Partie A : Des lois exponentielles

On considère p techniciens qui interviennent auprès d'une machine. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note X_k la variable aléatoire donnant la durée (en heure(s)) de l'intervention du k-ième technicien. On admet que les variables aléatoires $(X_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre λ.

1) a) Démontrer par récurrence sur n que la variable aléatoire X_k admet un moment à tout ordre n égal à :

$$m_n(X_k) = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

On rappelle que le moment d'ordre n d'une variable aléatoire X est l'espérance de X^n.

b) Déterminer la nature et la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{m_n(X_k)}$ (pour $n \in \mathbb{N}$).

2) On note $Y_p = \min(X_1, \ldots, X_p)$.

a) Calculer $\overline{F}_{X_1}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En considérant $\overline{F}_{Y_p}(t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$), démontrer que la variable aléatoire Y_p suit une loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

c) Exprimer $\mathrm{E}(Y_p)$ et $\mathrm{Var}(Y_p)$ en fonction de λ.

3) On suppose, dans cette question uniquement, que $p = 2$ et que la durée moyenne de l'intervention des techniciens est de deux heures. Calculer alors les probabilités ci-dessous.

a) probabilité que la durée de l'intervention du second technicien soit inférieure ou égale à 2 heures.

b) probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second technicien est supérieure ou égale à 2 .

c) probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second technicien est inférieure ou égale à 2.

Partie B : Calcul d'une limite d'une probabilité

1) On note $Z_2 = \max(X_1, X_2)$.

a) Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une densité que l'on exprimera à l'aide de densités de lois exponentielles.

b) Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une espérance et obtenir une égalité entre $\mathrm{E}(Y_2) + \mathrm{E}(Z_2)$ et $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$. Pouvait-on anticiper cette égalité ?

c) Justifier enfin l'existence de $\mathrm{Var}(Z_2)$ et la calculer.

2) Soient $x \in \mathbb{R}_+$et $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $P(Z_2 \geqslant n + x)$ et démontrer que $P(Z_2 \geqslant n + x)$ est équivalent (quand n tend vers $+\infty$) au terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial

b) Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_2 \geqslant n + x \mid Z_2 \geqslant n) = P(X_1 \geqslant x).$$

c) La formule précédente est-elle encore exacte si on remplace la variable aléatoire Z_2 par la variable aléatoire X_1 ?