1

Introduction.

1.1 Des vecteurs.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation du plan (ou de l'espace) qui à tout point M associe l'unique point M' telle que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
La translation de vecteur nul est l'identité du plan (ou de l'espace).
Pour quatre points A, B, C, D du plan (ou de l'espace) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.
Pour quatre points A, B, C, D du plan (ou de l'espace) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
Un vecteur non nul est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.
Un vecteur a une infinité de représentants : on peut représenter un vecteur à partir de tout point de l'espace :
Etant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point A, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

1.2 Repères, coordonnées.

On se place ici dans le plan et l'espace géométrique usuels munis chacun d'un repère orthonormal.

On note $\mathcal{P}$ le plan et $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal. On note $\mathcal{B}$ la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

• on écrit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour indiquer que M est le point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$, autrement dit l'unique point M vérifiant : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

• on écrit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour indiquer que $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (a, b) dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit l'unique point M vérifiant : $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

On note $\mathcal{E}$ l'espace et $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormal.

• on écrit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour indiquer que M est le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$, autrement dit l'unique point M vérifiant : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

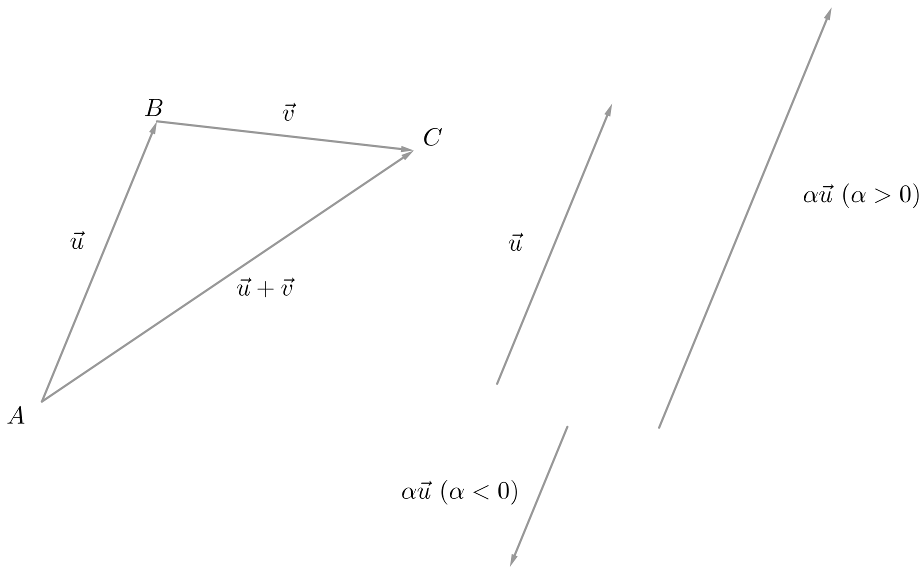
• on écrit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour indiquer que $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit l'unique point M vérifiant : $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$

Une fois ce repère fixé,
L'application qui à (x, y, z) associe $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ est une bijection, l'image de (x, y, z) est le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

1.3 Calculs sur les vecteurs.

On définit deux opérations sur l'ensemble des vecteurs.
La définition de la somme est la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad\qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$



On définit alors deux opérations sur $\mathbb{R}^3$ compatibles avec les opérations sur les vecteurs :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \qquad \text{et} \qquad k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

L'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) est un espace vectoriel.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, a et b deux scalaires, on a alors :

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
2. $\exists \vec{0} \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
3. $\exists \vec{u}' \quad \vec{u} + \vec{u}' = \vec{0}$ (on note : $\vec{v}' = -\vec{v}$)
4. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
5. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
6. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
7. $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$
8. $0\ \vec{u} = \vec{0}$
9. $1\ \vec{u} = \vec{u}$

Généralisation de la relation de Chasles avec $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des points de l'espace.

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_{k-1}A_k} = \overrightarrow{A_0A_n}$$

1.4 Norme d'un vecteur

Soient A et B deux points de l'espace, la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB.

$$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Si $\vec{u}$ est vecteur de l'espace de coordonnées (x, y, z) alors :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Propositions :

① $\|\|\vec{u}\|\| \geqslant 0$	② $\|\|\vec{u}\|\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
③ $\|\|\lambda\vec{u}\|\| = \|\lambda\|.\|\|\vec{u}\|\|$	④ $\|\|\vec{u} + \vec{v}\|\| \leqslant \|\|\vec{u}\|\| + \|\|\vec{v}\|\|$

1.5 Vecteurs colinéaires.

Définition :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que :

$$a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = \vec{0}$$

Remarques :

- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Définition (*famille libre de deux vecteurs*).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si, et seulement si, $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \implies a = b = 0.$

Cas particulier de deux vecteurs du plan.

Proposition : *Condition (CNS) de colinéarité.*

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan,
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$

Définition :

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$,
on appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$

2

Produit scalaire.

On se place toujours dans un repère orthonormal.

2.1 Définition.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace respectivement de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z')
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Remarques :

- $||\vec{u}||^2 = \vec{u}\,.\,\vec{u}$
- Définition similaire pour le produit scalaire de deux vecteurs du plan : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy$

D'autres moyens de calculer le produit scalaire de deux vecteurs.

avec les normes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

avec le cosinus :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Soient A, B et C tels que $A \neq B$ et $A \neq C$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$$

avec le projeté orthogonal :

Soient A, B et C tels que $A \neq B$,
on note H est le projeté orthogonal de C sur (AB),
si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$
sinon $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\,AB \times AH$

Avec la notion de valeur algébrique :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$

Orthogonalité.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Deux droites (AB) et (DC) sont **orthogonales** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

2.2 Propriétés.

Propositions :

① $\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
② $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
③ $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}) \in E^3,$

$$(\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \alpha\, \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \beta\, \vec{u}_2 \cdot \vec{v}$$

④ $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in E^3,$

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha\, \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta\, \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

Pour ③ et ④ on parle de bilinéarité du produit scalaire.

Propositions :

① $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$
② $||\vec{u}||^2 = \vec{u}.\vec{u}$ (aussi noté $\vec{u}^{\,2}$)
③ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\, \vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$
④ $(\vec{u} - \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\, \vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$
⑤ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$

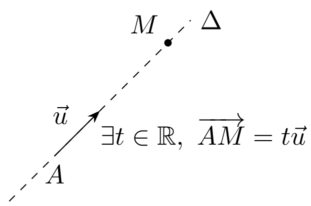
3 Droites et cercles du plan.

On note $\mathscr{P}$ le plan (*un ensemble de points*) et P l'ensemble des vecteurs du plan.
On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

3.1 Vecteur directeur, représentation paramétrique d'une droite.

Soient A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan.
La droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$ (vecteur directeur) est l'ensemble : (noté $\mathcal{D}(A, \vec{u})$)

$$\left\{ M \in \mathscr{P} \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \right\}$$



Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de P

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + t\,a \\ y = y_A + t\,b \end{cases}$$

$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est **une représentation paramétrique de la droite** de $\mathcal{D}(A, \vec{u})$

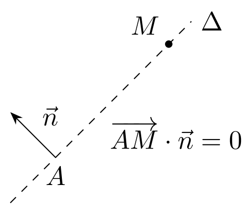
Remarques : Soient A et B deux points du plan et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3.2 Equation cartésienne d'une droite, vecteur normal.

Définition :

> Soit $\mathfrak{D}$ une droite passant par le point A,
> Dire que $\vec{n}$ est une vecteur normal de $\mathfrak{D}$ signifie que $M \in \mathfrak{D} \iff \overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = 0$



Si le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ alors il existe c tel que $\mathcal{D} : ax + by = c$

$$\mathcal{D} : ax + by = c \quad \text{signifie que} \quad \mathcal{D} = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{P} \mid \quad ax + by = c \right\}$$

L'équation : $ax + by = c$ est appelée **équation cartésienne** de la droite $\mathcal{D}$.

Remarques : Soient $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteur normal $\vec{n}'$,
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

Proposition :

① Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite D d'équation cartésienne $ax + by = c$

② Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D d'équation cartésienne $ax + by = c$

Remarques : Soient $\mathcal{D} : ax + by = c$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y = c'$,
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si, et seulement si, $ab' - a'b = 0$
- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa' + bb' = 0$

3.3 Equation cartésienne d'un cercle du plan.

Soient $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ un point et $R \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

Les points de $\mathscr{C}$ sont caractérisés par l'équivalence suivante :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C} \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

3.4 Représentation paramétrique d'un cercle du plan.

Soient $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ un point et $R \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

Les points de $\mathscr{C}$ sont caractérisés par l'équivalence suivante :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{C} \iff \exists t \in [0; 2\pi[, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_\Omega + R\cos(t) \\ y = y_\Omega + R\sin(t) \end{array} \right.$$

4

Droites et plans de l'espace.

On note $\mathscr{E}$ l'espace (*un ensemble de points*) et E l'ensemble des vecteurs de l'espace.
On munit l'espace d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

4.1 Vecteur directeur, représentation paramétrique d'une droite.

Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
La droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$ (vecteur directeur) est l'ensemble : (noté $\mathcal{D}(A, \vec{u})$)

$$\left\{ M \in \mathcal{E} \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R},\, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \right\}$$

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une **représentation paramétrique de la droite** $\mathcal{D}(A, \vec{u})$

Remarques : Soient A et B deux points de l'espace et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

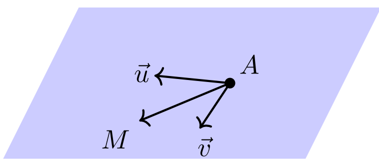
- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- Attention :
  Deux droites de l'espace sont perpendiculaires si, et seulement si, elles sont orthogonales et sécantes.

4.2 Base d'un plan, représentation paramétrique d'un plan.

Soient A un point, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Le plan passant par A et dirigée par $(\vec{u}, \vec{v})$ (base du plan) est l'ensemble :

$$\left\{ M \in \mathcal{E} \;\middle|\; \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2,\, \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + t'\vec{v} \right\}$$

On notera $\Pi(A, \vec{u}, \vec{v})$ ce plan.



Plan Π

Soient $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ un point de l'espace, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

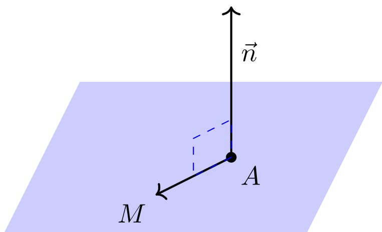
Les points du plan $\Pi(A,\vec{u},\vec{v})$ sont caractérisés par l'équivalence :

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\Pi(A,\vec{u},\vec{v}) \iff \exists(t,t')\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases}x=x_A+ta+t'a'\\ y=y_A+tb+t'b'\\ z=z_A+tc+t'c'\end{cases}$$

$\begin{cases}x=x_A+ta+t'a'\\ y=y_A+tb+t'b'\\ z=z_A+tc+t'c'\end{cases}\quad ((t,t')\in\mathbb{R}^2)$ est une **représentation paramétrique du plan** $\Pi(A,\vec{u},\vec{v})$.

4.3 Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan.

Soit $\mathfrak{P}$ un plan passant par le point A, Dire que $\vec{n}$ est une vecteur normal de $\mathfrak{P}$ signifie que $M\in\mathfrak{P} \iff \overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n}=0$



Plan $\mathfrak{P}$

Remarques :

- Les vecteurs normaux d'un plan de l'espace sont non nuls.
- Les vecteurs normaux d'un plan $\Pi(A,\vec{u},\vec{v})$ sont les vecteurs $\vec{n}$ non nuls vérifiant : $\vec{n}.\vec{u}=0$ et $\vec{n}.\vec{v}=0$.
  (Il suffit d'être orthogonal à deux vecteurs non colinéaires pour l'être à tous les vecteurs du plan).
- Si $\mathfrak{P}: ax+by+cx=d$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathfrak{P}$.
- Si le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathfrak{P}$ alors il existe d tel que $\mathfrak{P}: ax+by+cx=d$

L'équation : $ax+by+cz=d$ est appelée **équation cartésienne** du plan $\mathfrak{P}$.

Soient deux plans $\mathfrak{P}: ax+by+cz=d$ et $\mathfrak{P}': a'x+b'y+c'z=d'$

- $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
- $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
- $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa'+bb'+cc'=0$.

Soient un plan $\mathfrak{P}$ de vecteurs normal $\vec{n}$ et $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- $\mathscr{D}$ et $\mathfrak{P}$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
- $\mathscr{D}$ et $\mathfrak{P}$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

4.4 Système d'équations cartésiennes définissant une droite.

Toute droite de l'espace peut s'exprimer comme l'intersection de deux plans sécants.

On obtient alors une caractérisation des points $M(x, y, z)$ d'une droite par un système d'équations linéaires.

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{l} ax \ + \ by \ + cz \ = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array} \right.$$

Remarques :

- Pour que ce système caractérise les points d'une droite, les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont nécessairement non colinéaires.
- Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ si, et seulement si, $\vec{u} \perp \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \perp \vec{n}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

4.5 Positions relatives de trois plans.

$$\text{On note : } \quad \Sigma \left\{ \begin{array}{ll} a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z = d_1 & \quad \mathcal{P}_1 \\ a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z = d_2 & \quad \mathcal{P}_2 \\ a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z = d_3 & \quad \mathcal{P}_3 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$$

1. Trois plans parallèles. ($\mathcal{S}$ est vide ou $\mathcal{S}$ est un plan).
2. Exactement deux plans parallèles. ($\mathcal{S}$ est vide ou $\mathcal{S}$ est une droite)
3. Aucun couple de plans parallèles. ($\mathcal{S}$ est vide, une droite ou $\mathcal{S}$ est un point).