Fonctions réelles de deux variables réelles

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
Soient a, b, c et d tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$.
Dans ce chapitre f désigne une application de $]a,b[\times]c,d[$ dans $\mathbb{R}$. *($]a,b[\times]c,d[$ est un pavé ouvert du plan $\mathbb{R}^2$).*

$$f: \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

1) Surface représentative.

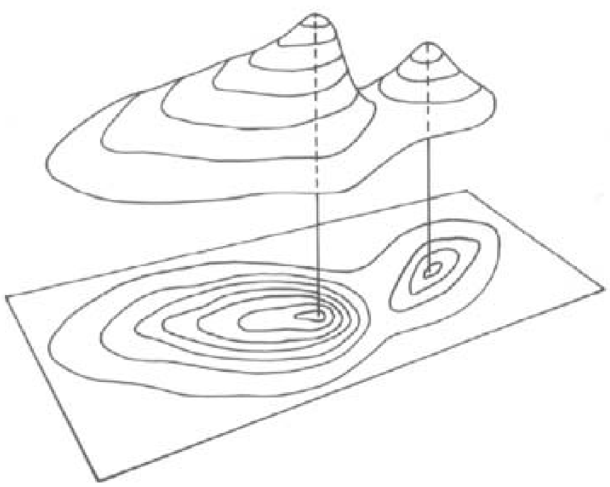
La représentation graphique de f dans un repère de l'espace est une surface, c'est l'ensemble :

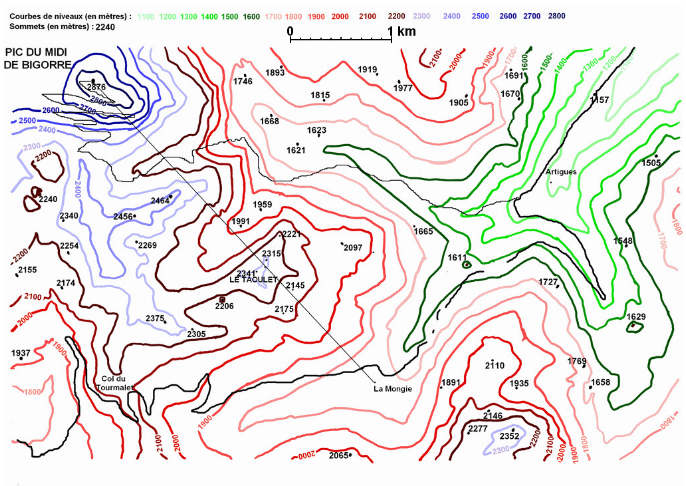
$$S_f = \{M(x,y,z) \in \mathcal{E} \mid \quad z = f(x,y)\ \}$$

2) Courbes (lignes) de niveaux.

On appelle courbes (ou lignes) de niveau de la surface $S : z = f(x,y)$ les ensembles de la forme :

$$\{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid f(x,y) = c\ \} \qquad \text{où } c \text{ et une constante réelle}$$





3) Dérivées partielles du premier ordre.

Définitions :

Soit $(x_0, y_0) \in P$.

- Dire que f est dérivable par rapport à x en (x_0, y_0),

  signifie que la fonction partielle $x \longmapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0,

  signifie que $\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 ;

  on note alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

- Dire que f est dérivable par rapport à y en (x_0, y_0),

  signifie que la fonction partielle $y \longmapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0,

  signifie que $\dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 ;

  on note alors : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$

Remarques :

• Pour déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, on dérive $x \longmapsto f(x,y)$ en considérant que y est une constante.

• Pour déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on dérive $y \longmapsto f(x,y)$ en considérant que x est une constante.

• On définit ici des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

• On note aussi $\partial_1(f)$ la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_2(f)$ la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

4) Fonctions de classe C^1.

Définition.

Dire que f est de classe C^1 sur P signifie que :
① f admet en tout point des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de P et
② ses dérivées partielles sont continues sur P.

Remarque : Ne pas dire "f est dérivable".

5) Développement limité d'ordre 1.

Théorème

Si f une fonction de classe C^1 sur P alors

Pour chaque $(x_0,y_0) \in P$ fixé, il existe une fonction ε telle que pour tout $(x,y) \in P$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + d\;\varepsilon(d)$$

avec $d = ||(x-x_0, y-y_0)||$ et $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$

Remarque : $||(x-x_0, y-y_0)|| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

Complément. La différentielle de f en (x_0,y_0) notée $df_{(x_0,y_0)}$ est la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$:

$$(a,b) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\; a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\; b$$

on note aussi : $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

6) Gradient.

Définition :

Soit f une fonction de classe C^1 sur P,
on appelle gradient de la fonction f en (x_0,y_0) le vecteur :

$$\text{grad}(f)(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\;;\;\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Remarques.

• On note aussi $\nabla(f)(x_0,y_0)$ ou $\overrightarrow{\nabla}(f)(x_0,y_0)$ le gradient de f en (x_0,y_0).

• Le DL peut s'écrire en notant $M(x,y)$ et $M_0(x_0,y_0)$:

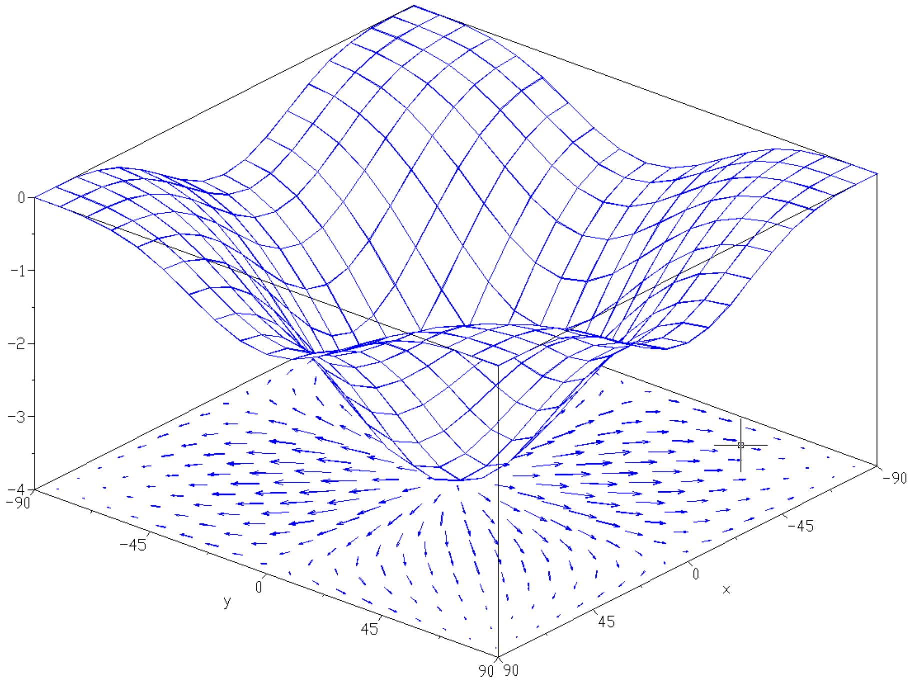
$$f(M) = f(M_0) \;+\; \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)(M_0)\;.\;\overrightarrow{M_0M}}_{\text{produit scalaire}} \;+\; d\;\varepsilon(d)$$

avec $d = M_0M$ et $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$

Le gradient représenté dans le plan (Oxy) :

① le gradient est un vecteur normal aux courbes de niveaux.

② le gradient indique la direction de plus grande pente et dans le sens des plus grandes valeurs.



7) Dérivation de $t \longmapsto f(x(t), y(t))$.

Théorème :

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : P \to \mathbb{R}$ de classe C^1,
$x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que : $\forall t \in I, \quad (x(t), y(t)) \in P$.
La fonction $t \longmapsto f(x(t), y(t))$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction :

$$t \longmapsto x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Démonstration :

Si $g : t \longmapsto f(x(t), y(t))$ alors

$$g'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{gradient de } f} (x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

8) Dérivées partielles de $(x, y) \longmapsto f(u(x, y), v(x, y))$

Proposition :

Pour f, u, v toutes des fonctions de classe C^1 :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(u(x, y), v(x, y))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(u(x, y), v(x, y)\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(u(x, y), v(x, y)\right)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(u(x, y), v(x, y))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(u(x, y), v(x, y)\right)\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(u(x, y), v(x, y)\right)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

Démonstration :

9) Condition nécessaire pour avoir un extremum local.

Définition.

Dire que f présente un maximum local (resp. minimum local) en $(x_0, y_0) \in P$ signifie qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0) tel que :

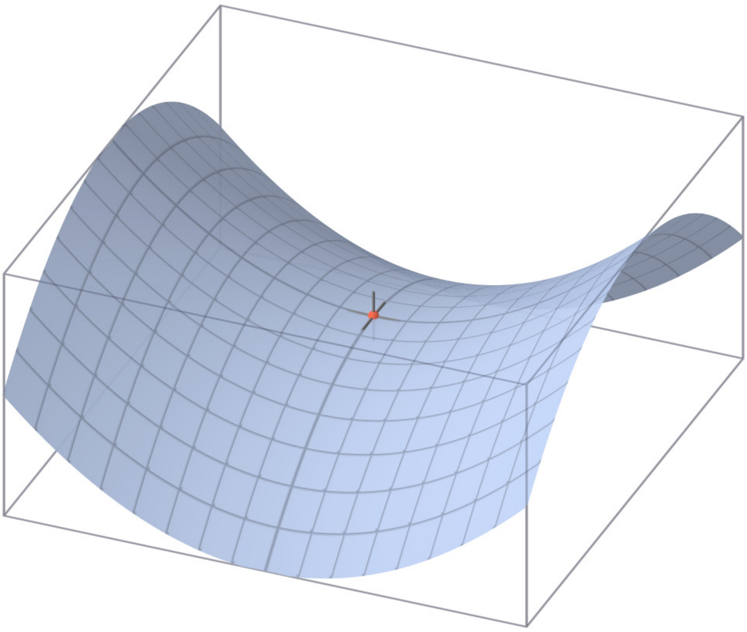
$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}, \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0) \qquad (\text{ resp. } f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) \text{ })$$

Proposition :

Soit f une fonction de classe C^1 sur P et $(x_0, y_0) \in P$

si f admet un extremum en (x_0, y_0) **alors** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$

Cette proposition n'est qu'une implication, il existe des contre-exemples à sa réciproque.
La nullité des dérivées partielles n'implique pas la présence d'un extremum local.



Définition :

On appelle **points critiques** de f les couples (x_0, y_0) de P vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

10) Dérivée partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz.

Définition :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $P =]a,b[\times]c,d[$,

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet des dérivées partielles sur P on note $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet des dérivées partielles sur P on note $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Théorème de Schwarz :

On note $P =]a,b[\times]c,d[$ et f une fonction de P dans $\mathbb{R}$,

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont continues sur U **alors** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$