

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient a, b, c et d tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $-\infty \leq c < d \leq +\infty$.

Dans ce chapitre f désigne une application de $P =]a, b[\times]c, d[$ dans \mathbb{R} . (P est un pavé ouvert du plan \mathbb{R}^2).

$$f : P \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y)$$

1) Surface représentative.

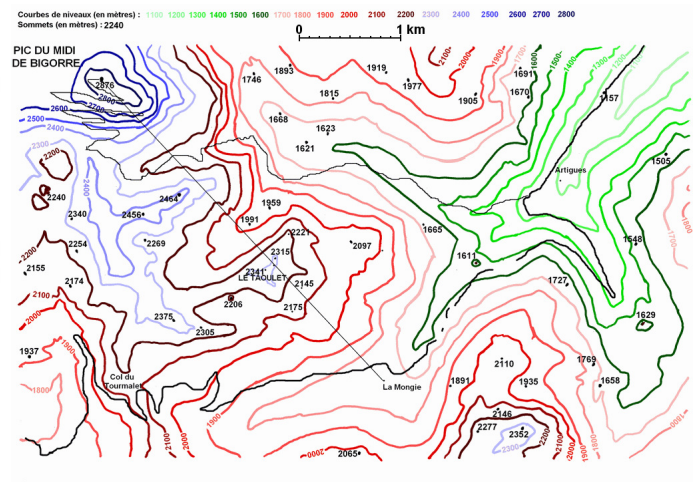
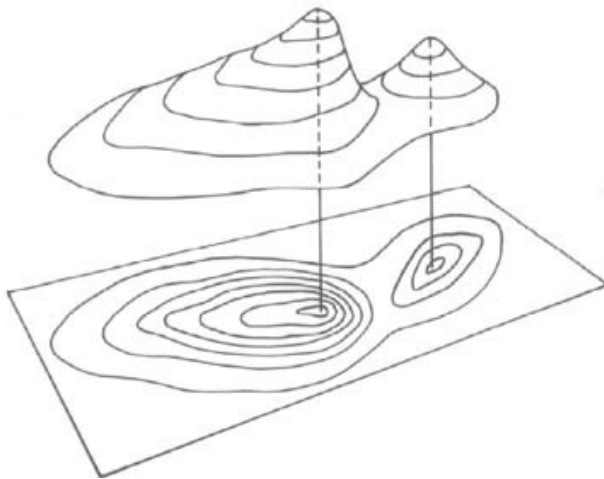
La représentation graphique de f dans un repère de l'espace est une surface, c'est l'ensemble :

$$S_f = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid z = f(x, y)\}$$

2) Courbes (lignes) de niveaux.

On appelle courbes (ou lignes) de niveau de la surface $S : z = f(x, y)$ les ensembles de la forme :

$$\{M(x, y) \in P \mid f(x, y) = c\} \quad \text{où } c \text{ est une constante réelle}$$



3) Dérivées partielles du premier ordre.

Définitions :

Soit $(x_0, y_0) \in P$.

- Dire que f est dérivable par rapport à x en (x_0, y_0) ,

signifie que la fonction partielle $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 ,

ou encore $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 ;

on note alors :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- Dire que f est dérivable par rapport à y en (x_0, y_0) ,

signifie que la fonction partielle $y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 ,

ou encore $\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 ;

on note alors :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Remarques :

- Pour déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on dérive $x \mapsto f(x, y)$ en considérant que y est une constante.
- Pour déterminer $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, on dérive $y \mapsto f(x, y)$ en considérant que x est une constante.

- On définit ici des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} : $\frac{\partial f}{\partial x} : P \rightarrow \mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : P \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Proposition.

Soit f admettant des dérivées partielles sur P :

- ❶ Si $\forall(x, y) \in P, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ alors $\exists \varphi :]c, d[\rightarrow \mathbb{R} : \forall(x, y) \in P, f(x, y) = \varphi(y)$
- ❷ Si $\forall(x, y) \in P, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ alors $\exists \varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R} : \forall(x, y) \in P, f(x, y) = \varphi(x)$

4) Fonctions de classe C^1 .

Définition.

Dire que f est de classe C^1 sur P signifie que :

- ❶ f admet en tout point des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de P et
- ❷ ses dérivées partielles sont continues sur P .

5) Développement limité d'ordre 1.

Théorème

Si f une fonction de classe C^1 sur P alors

Pour chaque $(x_0, y_0) \in P$ fixé, il existe une fonction ε telle que pour tout $(x, y) \in P$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + d \varepsilon(d)$$

avec $d = \|(x - x_0, y - y_0)\|$ et $\lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon(d) = 0$

Remarque : $\|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Complément. La différentielle de f en (x_0, y_0) notée $df_{(x_0, y_0)}$ est la forme linéaire de \mathbb{R}^2 suivante :

$$(a, b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) b$$

on note aussi : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

6) Gradient.

Définition :

Soit f une fonction de classe C^1 sur P ,

on appelle gradient de la fonction f en (x_0, y_0) le vecteur :

$$\text{grad}(f)(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Remarques.

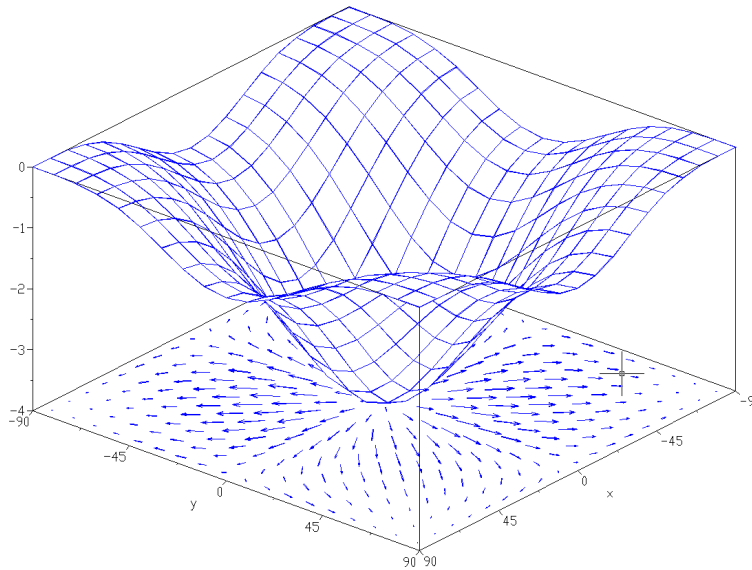
- On note aussi $\nabla(f)(x_0, y_0)$ ou $\vec{\nabla}(f)(x_0, y_0)$ le gradient de f en (x_0, y_0) .
- Le DL peut s'écrire en notant $M(x, y)$ et $M_0(x_0, y_0)$:

$$f(M) = f(M_0) + \underbrace{\vec{\text{grad}}(f)(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0M}}_{\text{produit scalaire}} + d \varepsilon(d)$$

avec $d = M_0M$ et $\lim_0 \varepsilon = 0$

Le gradient représenté dans le plan (Oxy) :

- ① le gradient est un vecteur normal aux courbes de niveaux.
- ② le gradient indique la direction de plus grande pente et dans le sens des plus grandes valeurs.



7) Dérivation de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.

Théorème :

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ,
 $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que : $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in P$.
 La fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction :

$$t \mapsto x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Si $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ alors $g'(t) = \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix}}_{\text{gradient de } f} \right\rangle = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$

Interprétation : La variation de f le long d'une trajectoire est donnée par la projection du vecteur tangent sur la direction du gradient.

8) Dérivées partielles de $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$

Proposition.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 . On pose

$$g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)).$$

Alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y), v(x, y)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u(x, y), v(x, y)) \end{pmatrix}.$$

9) Condition nécessaire pour avoir un extremum local.

Définition.

Dire que f présente un maximum local (resp. minimum local) en $(x_0, y_0) \in P$ signifie qu'il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de (x_0, y_0) tel que :

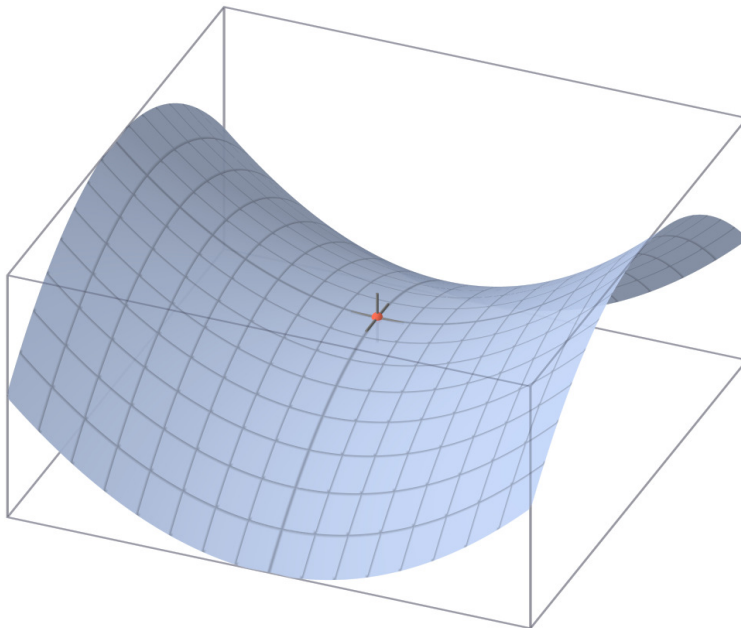
$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}, \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{ resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$$

Proposition :

Soit f une fonction de classe C^1 sur P et $(x_0, y_0) \in P$

si f admet un extremum en (x_0, y_0) alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Cette proposition n'est qu'une implication, il existe des contre-exemples à sa réciproque. La nullité des dérivées partielles n'implique pas la présence d'un extremum local.



Définition :

On appelle **points critiques** de f les couples (x_0, y_0) de P vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

10) Dérivée partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz.

Définition :

Soit f une fonction de classe C^1 sur $P =]a, b[\times]c, d[$,

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet des dérivées partielles sur P on note $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Si $\frac{\partial f}{\partial y}$ admet des dérivées partielles sur P on note $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Théorème de Schwarz :

On note $P =]a, b[\times]c, d[$ et f une fonction de P dans \mathbb{R} ,

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont continues sur P alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$