Devoir surveillé n° 5

17 février 2024

Durée de l'épreuve : 4h

*L'utilisation de la calculatrice, ou de tout autre appareil électronique (téléphone portable, ordinateur...), est **interdite**.*

Le sujet comporte 3 problèmes indépendants.

Problème 1 : loi à densité de Pareto

Partie 1 : Propriété d'une loi de probabilité.

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f définit une densité de probabilité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

On dit que X suit la **loi de Pareto de paramètre c**.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1 .
   a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $c > 1$, et dans ce cas là calculer cette espérance.
   b) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.
   c) On pose $Z = \dfrac{X}{t}$, calculer pour x réel $P_{(X>t)}(Z \leqslant x)$. Que remarque-t-on ?

Partie 2 : Réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y. Dans toute la suite, on suppose que :

— g est nulle sur $]-\infty\,;\ 1[$;
— g est strictement positive et continue sur $[1\,;\ +\infty[$
— pour tout réel t strictement supérieur à 1, $P(Y > t) > 0$;
— pour tout réel t strictement supérieur à 1 et pour tout réel x, $P_{(Y>t)}\left(\dfrac{Y}{t} \leqslant x\right) = P(Y \leqslant x)$.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.
5. a) Établir l'égalité :
$$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, \qquad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.$$
   b) Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1\,;\ +\infty[$ et en déduire que :
$$\forall x > 1, \forall t > 1, \qquad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.$$
   c) Montrer enfin la relation :
$$\forall t > 1 \qquad G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1.$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1\ ;\ +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1\ ;\ +\infty[$, associe $y(t)$. On note (E.1) l'équation différentielle
$$y + \frac{t}{c}y' = 0 \tag{E.1}$$
et (E.2) l'équation différentielle
$$y + \frac{t}{c}y' = 1 \tag{E.2}$$
<u>Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.</u>
   a) Résoudre l'équation (E.1).
   b) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E.2) sont les fonctions h définies par :
$$\forall t > 1, \qquad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}.$$
7. a) Montrer finalement que l'on a :
$$\forall t > 1, \qquad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$
   b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1\ ;\ +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 : Simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.
   a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.
   b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   c) Soit $\lambda > 0$ et U suivant une loi $\mathscr{U}([0,\ ;\ 1[)$, quelle est la loi suivie par $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$? (Justifier)
   d) En utilisant les réqultats des questions précédentes, écrire une fonction Python d'en-tête `def simulX (c,n)` qui pour un entier n strictement positif renvoie une liste de n réalisations d'une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètre c.

Problème 2 : recherche de vecteur propre avec Python

On souhaite dans ce problème écrire un programme permettant de calculer, sous certaines conditions, un vecteur propre d'une matrice. Quelques fonctions Python sont rappelées en annexe à la fin du sujet.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels, et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Partie 1 : quelques questions de cours

1. Définir les termes de valeur propre et vecteur propre pour une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Définir et donner la notation du sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.
4. Donner une condition suffisante mais non nécessaire pour qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.

Partie 2 : programmation

À chaque matrice $M=(m_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on associe un nombre réel positif $||M||$, appelée *norme* de M, défini par :

$$||M|| = \max_{\substack{i\in[\![1\ ;\ n]\!]\\ j\in[\![1\ ;\ p]\!]}} (|m_{i,j}|).$$

1. Démontrer que $||M||=0 \Leftrightarrow M=0$.
2. Sans faire appel à une fonction `max` prédéfinie dans Python, écrire une fonction `Norme` qui, étant donné une matrice M de taille quelconque, calcule er renvoie le nombre $||M||$.
3. Écrire une fonction `Normalise` qui, étant donné une matrice colonne v non nulle, retourne une nouvelle matrice colonne w définie par $w=\dfrac{1}{||v||}v$.

On se donne à présent une matrice carrée $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Soit v_0 un élément quelconque de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. En supposant qu'aucun des termes n'est dans le noyau de A, on peut former la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad v_{n+1}=\frac{1}{||Av_n||}Av_n.$$

4. Écrire une fonction `PuissanceIteree` qui étant donnée une matrice carrée A et n un entier naturel n, détermine la taille p de A, choisit aléatoirement une matrice colonne $v_0\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, puis calcule et renvoie, en supposant que tous les termes de la suite ci-dessus sont bien définis, la matrice colonne v_n.

On **admet** que l'on peut montrer que si $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonalisable et possède des valeurs propres $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_p$ qui vérifient :

$$\lambda_1>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_3|\geqslant\dots\geqslant|\lambda_p|,$$

alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus existe et ses composantes convergent vers les composantes d'une matrice colonne v qui est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1, sauf pour quelques choix de v_0. La probabilité, en choisissant aléatoirement v_0, de tomber sur l'une des exceptions est nulle.

On se propose d'écrire maintenant une fonction `VecteurPropre(A,e)` qui étant donnée une matrice carrée A satisfaisante les hypothèses décrites ci-dessus et un nombre `e`>0 calcule les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus jusqu'à ce que deux termes successifs vérifient $||v_{n+1}-v_n||<$`e`, et renvoie alors la matrice colonne v_{n+1}.

Voici trois propositions de programmes :

```python
def VecteurPropre1(A,e):
    d=np.shape(A)
    v=np.random.rand(d[1],1)
    w=Normalise(np.dot(A,v))
    while Norme(w-v)>=e:
        v=w
        w=Normalise(np.dot(A,v))
    return w
```

```python
def VecteurPropre2(A,e):
    d=np.shape(A)
    v=np.random.rand(d[1],1)
    w=Normalise(np.dot(A,v))
    ecart=Norme(w-v)
    while ecart>=e:
        v=w
        w=Normalise(np.dot(A,v))
    return w
```

```python
def VecteurPropre3(A,e):
    d=np.shape(A)
    v=np.random.rand(d[1],1)
    while Norme(Normalise(np.dot(A,v))-v)>=e:
        v=Normalise(np.dot(A,v))
    return Normalise(np.dot(A,v))
```

5. Parmi ces trois programmes, indiquer lequel est (ou lesquels sont) correct(s). Pour chaque programme **incorrect** on indiquera succintement ce qui ne va pas.

Problème 3 : matrices et probabilités

Dans tout ce problème, on se place dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices de tailles 2×2 à coefficients réels). On note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Si A désigne une matrice, on note A^T sa transposée et si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\det(A)$ désigne le déterminant de A.

Dans la partie A, on décrit certains ensembles inclus dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Dans la partie B, on utilise ces ensembles pour décrire l'ensemble des matrices qui commutent avec leur transposée. Enfin, dans la partie C, on calcule des probabilités relatives aux ensembles étudiés précédemment. Les trois parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Matrices symétriques et antisymétriques

L'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est noté $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, il est défini par :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad A = A^T\}.$$

De façon analogue, on considère l'ensemble des matrices dites antisymétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, il est noté $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ et est défini par

$$\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad A = -A^T\}.$$

On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Démontrer que : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c$.
   b) En déduire que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base et préciser sa dimension.
2. Montrer que J n'admet pas de valeur propre réelle.
3. a) Exprimer $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ à l'aide de J et en déduire que $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et la dimension.
   b) En considérant $I_2 + J$, démontrer que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie B : Matrices qui commutent avec leur transposée

Dans la suite de ce problème on considère l'ensemble des matrices qui commutent avec leur transposée :

$$\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \qquad AA^T = A^T A\}.$$

4. Proposer un exemple de matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ n'appartenant pas à $\mathscr{C}_2(\mathbb{R})$.
5. a) Démontrer que : $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}_2(\mathbb{R})$.
   b) En considérant à nouveau $I_2 + J$, vérifier que
   $$\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \not\subset \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2(\mathbb{R}).$$
6. a) Démontrer que :
   $$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d).$$
   b) En déduire que $\mathscr{C}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathrm{Vect}(I_2, J)$.
   c) Déterminer enfin une base et la dimension de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_2, J)$.

Partie C : Calculs de probabilités

Dans cette partie du problème, X_1, X_2, X_3 et X_4 désignent quatre variables aléatoires réelle mutuellement indépendantes définies sur un même univers Ω suivant toutes la loi uniforme discrète sur $[\![-1;1]\!]$, autrement dit :

$$\forall i \in [\![1;4]\!], \qquad P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_3(\omega) & X_4(\omega) \end{pmatrix}.$$

7. a) Démontrer que pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, X_i^2 suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
   b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_iX_j pour tout $(i,j) \in [\![1;4]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   c) En déduire que : $P\left(\det(A) = 0\right) = \dfrac{11}{27}$.
8. a) Démontrer que $P(A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{3}$.
   b) Calculer également $P(A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R}))$.
9. a) Démontrer que $P(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R})) = \dfrac{11}{27}$.
   b) Calculer enfin la probabilité conditionnelle : $P_{[\det(A)=0]}(A \in \mathscr{C}_2(\mathbb{R}))$.

Annexes

Commandes Python

On suppose que le module NumPy est importé via `import numpy as np`.
On suppose que le module random est importé via `import random as rd`.

Interprétation	Python
Matrice nulle de taille $n \times p$	`np.zeros([n,p])`
Matrice identité de taille n	`np.eye(n)`
Matrice de taille $n \times p$ remplies avec des coefficients choisis aléatoirement dans $[0;1]$	`np.random.rand(n,p)`
Copie de la matrice A dans une nouvelle matrice B	`B = np.copy(A)`
Dimensions de la matrice A	`d = np.shape(A)`
- nombre de lignes	`d[0]`
- nombre de colonnes	`d[1]`
Pour A et B matrices de tailles compatibles :	
- addition et soustraction	`A+B, A-B`
- multiplication matricielle	`np.dot(A,B)`
Coefficient d'indice (i,j) de la matrice A	`A[i,j]`
Valeur absolue d'un réel x	`abs(x)`
Nombre entier alétoire compris entre a et b inclus, choisi	`rd.randint(a,b)`
Nombre réel alétoire compris entre 0 et 1	`rd.random()`