Feuille Act_20 : Géométrie.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (resp. l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$)

Ex 1 : Soient A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace, I milieu de $[AB]$, J milieu de $[BC]$ et G centre de gravité de ABC. (On rappelle : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

① Simplifier les sommes suivantes :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} \qquad 2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GA}$$

② Compléter les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AJ}=\ldots\ldots\overrightarrow{AB}+\ldots\ldots\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AG}=\ldots\ldots\overrightarrow{AB}+\ldots\ldots\overrightarrow{AC}$$

Ex 2 : Dans le plan, on note $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

① Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
② Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de (AB).
② Faire une figure.

Ex 3 : Dans l'espace on note : $A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

① Montrer que ces trois points définissent un plan (ABC).
② Déterminer une équation cartésienne de ce plan.
③ Quel est l'ensemble $\{M(1,a,2a) \mid a\in\mathbb{R}\}$?
④ Déterminer le réel a pour lequel le point $M\begin{pmatrix}1\\a\\2a\end{pmatrix}$ appartienne au plan (ABC).
⑤ Représenter tous les éléments de cet exercice. (*Essayer d'abord seul, puis aidez-vous de Geogebra*)

Ex 4 : On se place dans le plan et on considère les droites suivantes :

$$\Delta_1 : x+\ y\ =1 \qquad \Delta_2 : \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Pour chacune de ces deux droites :

1) Tracer la droite Δ_i dans un repère orthonormal.
2) Représenter la droite D_i passant par O et perpendiculaire à Δ_i.
3) Déterminer un vecteur directeur de la droite D_i.

Ex 5 : On se place dans l'espace.
Donner un point et une base du sous-espace vectoriel dirigeant les droites ou plans suivants.

$$A_1 : \begin{cases} x+\ y\ =1 \\ x+2y-z=2 \end{cases} \qquad A_2 : \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases} \qquad A_3 : \begin{cases} x=2+t-t' \\ y=1-t+2t' \quad ((t,t')\in\mathbb{R}^2) \\ z=2t-t' \end{cases}$$

$$A_4 : x+2y-3z=3 \qquad A_5 : \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+2y-4z=2 \end{cases} \qquad A_6 : \begin{cases} x=2+t+t' \\ y=1-2t-2t' \quad ((t,t')\in\mathbb{R}^2) \\ z=3-t-t' \end{cases}$$

Ex 6 : On se place dans le plan.
Donner l'ensemble des vecteurs normaux de chacune des droites suivantes.

$$\Delta_1 : 2x - y = 1 \qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \qquad \Delta_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\Delta_4 : y = -3x - 2 \qquad \Delta_5 : y = 0 \qquad \Delta_6 : -x + 3y = 2$$

Ex 7 : On se place dans l'espace.
Donner un vecteur normal aux plans suivants.

$$A_1 : x+2y-3z = 3 \qquad A_2 : z = 2x+y-1 \qquad A_3 : x-3y = 0 \qquad A_4 : \begin{cases} x = 2 + t - t' \\ y = 1 - t + 2t' \\ z = 2t - t' \end{cases} ((t, t') \in \mathbb{R}^2)$$

Ex 8 : On se place dans l'espace.
Donner une base d'un plan orthogonal aux droites suivantes.

$$A_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \qquad A_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \qquad A_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Ex 9 : Dans tous les cas suivants déterminer la distance de A à Δ.

1) $A(1, -4)$ et $\Delta : y = -2x + 3$
2) $A(-1, 1)$ et $\Delta : 2x + 3y = 1$
3) $A(-1, 1)$ et $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Ex 10 : Dans tous les cas suivants déterminer la distance du point A à la droite Δ.

1) $A(1, -4, 1)$ et $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$
2) $A(1, -4, 1)$ et $\Delta : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$.

Ex 11 : Dans tous les cas suivants déterminer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

1) $A(1, -1, 1)$ et $\mathscr{P} : x + y - z = 1$.
2) $A(1, 0, 1)$ et $\mathscr{P} : \begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t' \end{cases} ((t, t') \in \mathbb{R}^2)$

Ex 12 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère trois points A, B et C de coordonnées respectives $(1, 1)$, (a, a^2) et $(-a^2, a)$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

1) Justifier l'existence de la droite (AB) et de la médiatrice de $[BC]$ puis montrer que ces deux droites ne sont pas parallèles.
2) Quand on fait varier a, décrire le lieu du point M intersection de la droite (AB) et de la médiatrice du segment $[BC]$.

Ex 13 : On considère les deux plans : $P_1 : x + y + 2z = 1$ et $P_2 : x + 3z = 2$
et pour tout réel a, on considère le plan : $\Pi_a : 2x + 3ay + 3a^2 z = 3$

1) Montrer que les deux plans P_1 et P_2 sont sécants en une droite D dont on déterminera un vecteur directeur que nous nommerons $\vec{v}$.
2) Montrer que : quel que soit le réel a, la droite D n'est pas incluse dans le plan Π_a.
3) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles D est parallèle à Π_a.
4) Déterminer, suivant les valeurs de a, les solutions du système :

$$(\Sigma) : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + 3ay + 3a^2 z = 3 \end{cases}$$