DEVOIR SURVEILLÉ

MATHÉMATIQUES

(3 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités ***à encadrer*** *dans la mesure du possible les conclusions.*

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Le sujet est formé d'une partie préliminaire, d'un exercice et d'un problème. L'exercice et le problème sont indépendants, mais une question utilise un théorème de la partie préliminaire.

Le but de la partie préliminaire est de démontrer deux inégalités classiques du cours de probabilité. Vous pouvez utiliser les théorèmes de cette partie même si vous ne l'avez pas abordée.

Notations :

- Pour A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

  on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire de Bernoulli vérifiant : $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si, et seulement si, $\omega \in A$.
- Pour X une variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$,

  Quand elles existent, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices carrées n lignes et n colonnes à coefficients réels,

  on note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie préliminaire

Théorème : *Inégalité de Markov.*

Soient X une variable aléatoire réelle et a un nombre réel,

$$\text{Si} \quad \begin{cases} X \text{ admet une espérance} \\ X \text{ est à valeurs positives} \\ a > 0 \end{cases} \quad \text{alors} \quad \mathbb{P}([X \geqslant a]) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Théorème : *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Soit X une variable aléatoire réelle,

$$\text{Si} \quad X \text{ admet une variance} \quad \text{alors} \quad \forall t > 0, \quad \mathbb{P}\Big(\Big[|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant t\Big]\Big) \leqslant \frac{V(X)}{t^2}.$$

1) **Démonstration de l'inégalité de Markov.**

   Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une espérance et a un réel strictement positif.

   a) Rappeler la loi de la variable aléatoire $\mathbb{1}_{X \geqslant a}$ et donner son espérance.

   b) On note $Y = a\,\mathbb{1}_{X \geqslant a}$. Justifier que $Y \leqslant X$.

   c) Conclure

2) **Démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.**

Soient X une variable aléatoire admettant une variance et t un réel strictement positif.

a) Justifier que la variable $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ vérifie les conditions d'utilisation de l'inégalité de Markov.

b) Tracer la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2}$

c) Conclure en appliquant l'inégalité de Markov à Y.

– –

Exercice

Soit c un réel strictement positif. On considère une variable aléatoire réelle X de densité :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{c^2}\, e^{-t^2/(2c^2)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Étudier la fonction f : variations, limite en $+\infty$, valeur du maximum.
Tracer le graphe de la fonction f.

2) Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité.

3) On note F_X la fonction de répartition de X.

a) Montrer que F_X réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle I que l'on déterminera, on notera F_X^{-1} l'application réciproque de cette bijection.

b) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, on note $Y = F_X^{-1}(U)$
Montrer que Y est une variable à densité et donner une de ses densités.

c) Donner une expression de $F_X^{-1}(u)$ en fonction de u élément de I.

d) En déduire une fonction Python permettant de simuler la réalisation de la variable aléatoire X.
La valeur de c sera un paramètre de cette fonction.
On commencera par donner les instructions permettant d'importer les bibliothèques nécessaires.

4) a) Rappeler, sans justification, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x$.

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/(2c^2)} \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

c) Prouver que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$, prouver que si la variable aléatoire X^n possède une espérance, alors la variable aléatoire X^{n+2} possède une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}\left(X^{n+2}\right) = c^2(n+2)\mathbb{E}\left(X^n\right).$$

6) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n, les variables aléatoires X^{2n} et X^{2n+1} possèdent une espérance et que :

$$\mathbb{E}\left(X^{2n}\right) = 2^n c^{2n} n! \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left(X^{2n+1}\right) = \sqrt{2\pi}\, \frac{(2n+1)!\, c^{2n+1}}{2^{n+1}\, n!}.$$

7) a) Justifier que X admet une variance et donner sa valeur.

b) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X, après avoir justifier que c'est possible.

c) En déduire un intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que $P\big(X \in [\alpha, \beta]\big) \geqslant 99\%$.

8) Déterminer un réel positif γ tel que $P\big(X \in [0, \gamma]\big) = 99\%$.

9) Comparer les intervalles obtenus aux deux questions précédentes. *On pourra admettre que :* $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} - 10\sqrt{\dfrac{4-\pi}{2}} < 0$.

Problème

Dans tout le problème n désigne un entier naturel.

Dans la partie A du problème, on s'intéresse à quelques propriétés d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On en cherche en particulier deux bases et on écrit la matrice de passage de l'une vers l'autre. Ces matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sont utilisées dans la partie B pour construire «par blocs» une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ dont on calcule les puissances n-ièmes et dont on détermine la diagonalisabilité. Enfin, dans la partie C, on utilise une telle matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ pour étudier le déplacement d'un soldat dans un fort.

Les parties A et B sont largement indépendantes mais la partie C utilise un résultat de la partie B.

Partie A : Un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On se place dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble de matrices défini par :

$$\mathscr{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) a) Justifier que toute matrice appartenant à $\mathscr{E}$ est diagonalisable.

(On pourra distinguer les deux cas : $b = 0$ et $b \neq 0$)

b) Démontrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Démontrer enfin que toutes les matrices de $\mathscr{E}$ commutent entre elles.

2) Soient les quatre matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $\mathscr{B} = (I, J)$ est une base de $\mathscr{E}$. Quelle est la dimension de $\mathscr{E}$?

b) Quelles sont les coordonnées de $M_{a,b}$ dans cette base $\mathscr{B}$?

3) a) Démontrer que $\mathscr{B}' = (U, V)$ est également une base de $\mathscr{E}$ et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.

b) Calculer U^n et V^n (pour $n \neq 0$) et le produit UV.

c) Déterminer enfin les coordonnées de $M_{a,b}^n$ dans la base $\mathscr{B}'$.

– –

On admet pour la partie B la propriété suivante *(produit par blocs)*.

> Soient A, B, C, D, A', B', C' et D' des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,
> Si M et M' sont les matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définies par quatre «blocs» :
>
> $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix},$$
>
> on a alors :
>
> $$M\,M' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

– –

Partie B : Une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$

On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par quatre «blocs» qui sont des matrices de $\mathscr{E}$ *(cf. partie A)* :

$$A = \begin{pmatrix} M_{c,0} & M_{a,b} \\ M_{0,0} & M_{d,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

1) On suppose que $c = d$.

a) Quel est le spectre de A ?

b) Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante, A est diagonalisable.

2) On suppose que $c \neq d$.

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} M_{c^n,0} & \dfrac{d^n - c^n}{d - c} M_{a,b} \\ M_{0,0} & M_{d^n,0} \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer les deux sous-espaces propres de A.

c) En déduire qu'il existe une matrice $Q \in GL_4(\mathbb{R})$, que l'on écrira à l'aide de quatre «blocs» de $\mathscr{E}$, et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = QDQ^{-1}.$$

Partie C : Quatre tours et un soldat.

Un fort est constitué de quatre tours notées T_1, T_2, T_3 et T_4. Ce fort est gardé en permanence par un soldat et à chaque relève, le successeur remplace le soldat relevé à la tour où ce dernier se trouvait. Des passages permettent de se déplacer d'une tour à l'autre. On admet que, à chaque heure :

- si le soldat de garde est en T_1 alors il reste toujours en T_1.

- si le soldat de garde est en T_2 alors il reste toujours en T_2.

- si le soldat de garde est en T_3, alors il se rend en T_1 avec une probabilité de $\frac{3}{20}$.

- si le soldat de garde est en T_3, alors il se rend en T_2 avec une probabilité de $\frac{1}{20}$.

- si le soldat de garde est en T_3, alors il ne se rend jamais en T_4.

- si le soldat de garde est en T_4, alors il se rend en T_1 avec une probabilité de $\frac{1}{20}$.

- si le soldat de garde est en T_4, alors il se rend en T_2 avec une probabilité de $\frac{3}{20}$.

- si le soldat de garde est en T_4, alors il ne se rend jamais en T_3.

On note $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \delta_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont le i-ième coefficient (pour $i \in [\![1, 4]\!]$) est la probabilité que le soldat de garde se trouve à l'heure n à la tour T_i.

1) a) Démontrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ (à écrire à l'aide de quatre «blocs» de $\mathscr{E}$) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.$$

b) Expliciter A^n et en déduire une expression de X_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ et n.

2) a) On suppose que $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0) = \dfrac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \beta_n = \frac{1}{2}$$

Interpréter ces limites.

b) On suppose que $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0) = (0, 0, 0, 1)$, Calculer les limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \beta_n$$

Interpréter ces limites.