

Il est important de conclure avec précision, d'encadrer les conclusions, de numéroter les pages (2/15), de mettre votre nom sur chaque copie double.

Problème 1 : Loi à densité de Pareto

Partie 1 : Propriété d'une loi de probabilité.

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- 1) Trop d'entre-vous ne connaissent pas la définition d'une densité de probabilité.

Et beaucoup ne trouvent pas de primitive de $x \mapsto \frac{c}{x^{1+c}}$

- 2) Il faut soigner la conclusion : $F(x) =$

- 3) Soit t un réel strictement supérieur à 1 .

- a) $E(X)$ existe si, et seulement si, $\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^c} dx$ converge.

Ensuite il faut refaire la démonstration travaillée sur les intégrales de Riemann (*qui sont je le rappelle hors programme*)

Si $c < 1$ alors ... l'intégrale diverge.

Si $c = 1$ alors ... l'intégrale diverge.

Si $c > 1$ alors ... l'intégrale converge.

Ensuite là aussi il faut soigner le calcul de primitive.

- b) Ici il fallait bien connaître la définition d'une probabilité conditionnelle.

Une erreur bizarre est rencontrée sur le calcul de $P((X > t) \cap (X \leq tx))$

- c) Pour tout x réel, $P_{(X>t)}(Z \leq x) = P(X > x)$.

La loi conditionnelle de Z sachant que $(X > t)$ est la loi de Pareto de paramètre c

Partie 2 : Simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c .

- 4) a) La conclusion de cette question est $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = F(e^x)$.

"Pour tout réel x , exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F ."

- b) Cette question permettait de vérifier ou pas la réponse à la question 2).

- c) C'est une question de cours.

- d) Les élèves rigoureux peuvent tiquer ici.

On a montré que Si X suit la loi de Paréto alors $\ln(X)$ suit la loi exponentielle de paramètre c .

Et là on utilise Si X suit la loi exponentielle de paramètre c alors e^X suit la loi de Pareto.

En toute rigueur il faudrait le démontrer.

Exercice.

- 5) a) Question facile sur laquelle, il ne faut pas perdre de point.

Très peu ne connaissent pas le théorème donnant l'inverse d'une matrice 2×2 .

- b) Il fallait bien lire la question. Il fallait montrer que la matrice P était la matrice d'une base de vecteur propre.

- 6) a) Ici il faut faire le lien avec l'énoncé, ce n'est pas la question habituelle des chaînes de Markov. Il ne faut pas perdre de temps.

- b) La relation était simple et on demandait une démonstration par récurrence.
- c) Question calculatoire que personne n'a fait dans la classe, mais elle est faisable.

Problème 2 : Modèle de LESLIE conservatif.

Partie A : Propriétés spectrales de la matrice L .

- 7) C'était une question importante, il fallait bien lire l'énoncé.

La matrice L avait $K + 1$ lignes et $K + 1$ colonnes.

Pour JUSTIFIER que L est de rang $K + 1$, le plus simple était de placer la dernière colonne au début.

Cela revient à faire dans l'ordre les opérations suivantes :

$$C_K \leftrightarrow C_{K+1}, \quad C_{K-1} \leftrightarrow C_K, \quad \dots, \quad C_1 \leftrightarrow C_2$$

La matrice est inversible donc 0 n'est pas valeur propre.

- 8) L'erreur la plus courante est sur la taille de $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot L$
- 9) a) Question faite en classe.
b) Question simple si on a fait les deux questions précédentes.
- 10) Question plus délicate, il fallait gérer une matrice ou un système de $K + 1 \times K + 1$
- 11) Des questions faisables mais toujours délicates.
- 12) L'étude de fonctions relativement simple.
La suite aussi mais les nombres complexes ont du vous faire peur.

Partie B : Etude asymptotique de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- 13) Récurrence relativement simple. Attention à la rédaction.
- 14) Question simple quand on maîtrise les nombres complexes.
- 15) Personne n'a fait cette question.

Partie C : Implémentation informatique

- 16) Pas très difficile et valorisée par le barème, donnez des explications.
- 17) Pas très difficile et valorisée par le barème, donnez des explications.
- 18) Beaucoup savent ce que L^{**n}
- 19) Faisable quand on a bien suivi le sujet.
- 20) Il faut avoir bien compris le sujet, on trouvait $t_0 = 100$ et $S = [0.3, 0.2, 0.1]$